2017年度学年末試験問題・線形代数Ⅰ（M2）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=$ (１) $(x-1)$ となっていたら (１) の正解は $(x+3)$ であり，((１)) $(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは０点とする。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ のとき，$A^2=O$ (零行列) となるための条件を求めよ。

(2) 次の行列 A, B の転置行列をつくれ。 [1] $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ [2] $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，次を計算せよ。 [1] ${}^tA\,{}^tB$ [2] ${}^tB\,{}^tA$

(4) ３次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ -1 & b & -3 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$ が交代行列のとき，a, b, c, d の値を求めよ。

[1] a [2] b [3] c [4] d

(5) 次の計算をせよ。

[1] $4\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

[3] $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2$ [4] $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，次を計算せよ。 [1] $(AB)^2$ [2] A^2B^2

(7) 行列 $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の成分を答えよ。

[1] (1, 2) [2] (2, 1)

２．$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とするとき，次の行列を求めよ。ただし，答のみ。(12点)

(1) P_1A　(2) P_2P_1A　(3) $P_3P_2P_1A$　(4) $P_4P_3P_2P_1A$

(5) A の逆行列は存在するか。存在する場合は A^{-1} を求め，存在しない場合は $\boxed{\text{存在しない}}$ と答えよ。

(6) ${}^tA$ の逆行列は存在するか。存在する場合は $\left({}^tA\right)^{-1}$ を求め，存在しない場合は $\boxed{\text{存在しない}}$ と答えよ。

3．$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ を対称行列と交代行列の和で表せ。(7点) (埼玉大)

4．$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(4点) (福井大・改)

(1) A^{-1} を求めよ。　(2) $AX+B=C$ を満たす行列 X を求めよ。

5．$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，$AB=BA$ が成り立つための条件を a, b, c, d で表せ。ただし，答のみ。(2点) (大阪府立大)

6．次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(25点)

(1) $A=\left(a_{ij}\right): m\times l$ 行列，$B=\left(b_{ij}\right): l\times s$ 行列，$C=\left(c_{ij}\right): s\times n$ 行列とする。AB の (i, j) 成分は $\sum_{p=1}^{[\ 1\ ]}[\ 2\ ]$ だから，$(AB)C$ の (i, j) 成分 $=\sum_{r=1}^{[\ 3\ ]}\left(\sum_{p=1}^{[\ 1\ ]}[\ 4\ ]\right)c_{rj}$

$=\sum_{p=1}^{[\ 1\ ]}[\ 5\ ]\left(\sum_{r=1}^{[\ 3\ ]}[\ 6\ ]\right)=A(BC)$ の (i, j) 成分　$\therefore\ (AB)C=A(BC)$

(2) $A=\left(a_{ij}\right)$ が n 次の正方行列のとき $\mathrm{tr}\,A=\sum_{p=1}^{n}a_{pp}$ と定義する。

さて，$B=\left(b_{ij}\right): s\times l$ 行列，$C=\left(c_{ij}\right): l\times s$ 行列とすれば BC は [1] 次の正方行列だから $\mathrm{tr}(BC)=\sum_{p=1}^{[\ 1\ ]}\left(\sum_{r=1}^{[\ 2\ ]}[\ 3\ ]\right)=\sum_{r=1}^{[\ 2\ ]}\left(\sum_{p=1}^{[\ 1\ ]}c_{rp}[\ 4\ ]\right)$ … ① ここで $\sum_{p=1}^{[\ 1\ ]}c_{rp}[\ 4\ ]$ は CB の $(r, [\ 5\ ])$ 成分だから①は $\mathrm{tr}([\ 6\ ])$ に等しい。　$\therefore\ \mathrm{tr}(BC)=\mathrm{tr}([\ 6\ ])$

(3) $A=\left(a_{ij}\right)$, $B=\left(b_{ij}\right)$ はともに $m\times l$ 行列とする。このとき ${}^tAB$ は [1] 次の正方行列になる。${}^tAB$ の (i, j) 成分 $=\sum_{p=1}^{[\ 2\ ]}[\ 3\ ]$ だから，$\mathrm{tr}\left({}^tAB\right)=\sum_{r=1}^{[\ 4\ ]}\left(\sum_{p=1}^{[\ 2\ ]}[\ 5\ ]\right)$ となる。この $\mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$ を A と B の内積と定義し $A\bullet B$ と表す。また，$\|A\|=\sqrt{A\bullet A}$ と定義する。さて，

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $\|A\|=[\ 6\ ]$, $\|B\|=[\ 7\ ]$, $A\bullet B=[\ 8\ ]$

となる。さらに $C=\dfrac{1}{[\ 6\ ]}A$ とするとき，$(B-kC)\bullet C=0$ となる数 k の値を求める [9] とな

るので $D=B-[\ 9\ ]C$ とすれば $\|D\|=\sqrt{B\bullet B-[\ 10\ ]B\bullet C+[\ 11\ ]}=\dfrac{2\sqrt{[\ 12\ ]}}{7}$

7．成分の値がすべて定数 c の p 次正方行列を A とする。即ち，
$A=\left(a_{ij}\right), a_{ij}=c\ \left(i=1,\cdots,p\ ;\ j=1,\cdots,p\right)$ このとき，次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(7点)

(ここから) A^2 の (i,j) 成分を計算し c,p で表せば (1) となる。同じく A^3 の (i,j) 成分を計算し c,p で表せば (2) となる。従って自然数 n に対して A^n の (i,j) 成分は (3) であると予想できる。これを数学的帰納法で証明する。簡単のために A^n の (i,j) 成分を $a_{ij}{}^{(n)}$ と表す。
$n=1$ のとき，明らかに成り立つ。$n=l$ のとき，$a_{ij}{}^{(l)}=$ (4) と仮定すると $n=l+1$ のとき，
$a_{ij}{}^{(l+1)}=\sum_{k=1}^{(\ 5\ )}$ (6) = (7) となり帰納法から予想が正しいことが示された。(ここまで)

8．$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & c\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。なお，a,b,c は互いに異なる自然数とする。
ただし，(2) は答のみ。(9点)

(1) $A^2=7A$ が成り立つように a,b,c を定めよ。

(2) (1) のとき，A^n を n および A で表せ。ただし，n は自然数とする。

9．次の問いに答えよ。ただし，(1) の [2] は答のみ。(9点)

(1) A を n 次の正方行列，E,O をそれぞれ A と同じ次数の単位行列，零行列とする。このとき

[1] $A^p=O$ を満たす自然数 p が存在するとき，$(E-A)\left(E+\sum_{k=1}^{p-1}A^k\right)$ を計算して簡単にせよ。

[2] A が上の [1] の条件を満たすとき，$E-A$ の逆行列が存在すればそれを E,A を用いて表せ。存在しない場合は $\boxed{\text{存在しない}}$ と答えよ。

(2) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ のとき，$E-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ の逆行列は存在するか。存在する場合はそれを求め，存在しない場合は $\boxed{\text{存在しない}}$ と答えよ。