2014年度学年末試験問題・数学B（M2）

１． $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、次を計算せよ。ただし、答のみ。

（1） $(A+B)^2$　（2） AB　（3） BA　（4） $(AB)^2$　（5） A^2　（6） B^2

（7） $A^2+2AB+B^2$　（8） A^2B^2　（9） A^2B　（10） ABA

（11） ${}^tA+{}^tB$　（12） ${}^t(AB)$　（13） ${}^tA\,{}^tB$　（14） ${}^tB\,{}^tA$

２． $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき、次の行列を求めよ。ただし、答のみ。

（1） A^{-1}　（2） B^{-1}　（3） $(AB)^{-1}$　（4） $A^{-1}B^{-1}$　（5） $B^{-1}A^{-1}$

（6） $(BA)^{-1}$　（7） $\left({}^tA\right)^{-1}$　（8） $(A+B)^{-1}$　（9） $A^{-1}+B^{-1}$

（10） $A^{-1}BA$　（11） $AX=B$ を満たす行列 X　（12） $YB=A$ を満たす行列 Y

（13） $AZA^{-1}=B$ を満たす行列 Z　（14） ${}^t\left(A^{-1}\right){}^tA$

３． $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、次の問いに答えよ。

（1） C^2 を計算せよ。ただし、答のみ。　（2） BC を計算せよ。ただし、答のみ。

（3） CB を計算せよ。ただし、答のみ。　（4） B^3 を計算せよ。ただし、答のみ。

（5） 同じ次数の正方行列 P，Q について、$PQ=QP$ が成り立つならば、

$(P+Q)^3=P^3+3P^2Q+3PQ^2+Q^3$ が成り立つことを証明せよ。

Hint： $PQ=QP$ という仮定がないと、例えば $(P+Q)^2=P^2+2PQ+Q^2$ は成り立たない。証明のどこにこの仮定を用いたか明記していない解答には点を与えない。これは思ったほど簡単な問題ではない。

（6） （5）と同じ仮定のもとで、任意の自然数 n に対して $(M+N)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k M^{n-k}N^k$ が成り立つことが知られている。なお、$M^0=E$，$N^0=E$ （E は単位行列）と考える。このことを用いてよいので、問題の行列 A に関して A^n を求めよ。*Hint*： $A=B+C$

４． n 次の正方行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ に対して、A のトレースとは記号で $tr\,A$ と表し、$tr\,A=\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ と定義する。即ち、対角成分の総和である。このとき、次の問いに答えよ。

（1） $A=\left(a_{ij}\right)$，$B=\left(b_{ij}\right)$ を同じ n 次の正方行列とするとき、$tr\,(AB)=tr\,(BA)$ を証明せよ。

（2） $A=\left(a_{ij}\right)$，$B=\left(b_{ij}\right)$ をともに $m\times n$ 行列 (同じ型) とする。このとき、次の［　］に入るもっとも適切な答えを解答用紙かけ。ただし、答のみ。

${}^tAB$ は［ 1 ］次の正方行列になるので $tr\left({}^tAB\right)$ を成分で表わしてみる。${}^tAB$ の (i,j) 成分は $\sum_{l=1}^{[\ 2\ ]}$［ 3 ］となるから、$tr\left({}^tAB\right)=\sum_{k=1}^{[\ 4\ ]}\left(\sum_{l=1}^{[\ 2\ ]}[\ 5\ ]\right)$ となる。

$tr\left({}^tAA\right)=\sum_{k=1}^{[\ 4\ ]}\left(\sum_{l=1}^{[\ 2\ ]}[\ 6\ ]\right)$ だから、A が零行列でなければ $tr\left({}^tAA\right)>0$ となる。正方行列とその転置行列の対角成分は同じだから、$tr\left({}^tAB\right)=tr\left({}^t([\ 7\ ])\right)$ となり、さらに ${}^t([\ 7\ ])={}^tBA$ だから $tr\left({}^tAB\right)=tr\left({}^tBA\right)$ が成り立つ。

いま、$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ とすれば $tr\left({}^tAA\right)=[\ 8\ ]$, $tr\left({}^tBB\right)=[\ 9\ ]$

$tr\left({}^tAB\right)=[\ 10\ ]$ となる。