# 2017年度後期中間試験問題・線形代数 I（M2）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば
$x^2+2x-3=$（ 1 ）$(x-1)$ となっていたら（ 1 ）の正解は $(x+3)$ であり，（（ 1 ））$(x-1)$
となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 2 つの直線 $\dfrac{x-1}{2}=-y-2=\dfrac{z-3}{3}$，$-\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-1}{k}$ が垂直であるように，定数 $k$ の値を求めよ。

（2） 点 $(-1,2,-1)$ を通り，平面 $2x-y+3z+1=0$ に平行な平面の方程式を求めよ。解答は $ax+by+cz+d=0$ または $ax+by+cz=d$ の形で答えよ。

（3） 3 点 $A(1,-1,-6)$，$B(2,1,-5)$，$C(-4,1,1)$ を通る平面の方程式を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，ベクトルは成分表示を答え，［ 8 ］以外は成分を整数とせよ。

(ここから) $\overrightarrow{AB}=$［ 1 ］，$\overrightarrow{AC}=$［ 2 ］であるから $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直なベクトルを $\vec{n}=(x,y,z)$ とすれば，$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=$［ 3 ］，$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=$［ 4 ］だから連立方程式 $\begin{cases}[\ 3\ ]=0\\ [\ 4\ ]=0\end{cases}$ を解いて $\vec{n}\neq\vec{0}$ なる $\vec{n}$ を 1 つ求めれば $\vec{n}=$［ 5 ］，従って求める平面の方程式は［ 6 ］となる。
$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ の外積を計算すれば $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=$［ 7 ］だから $\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=$［ 8 ］であり
これが求める平面の法線ベクトルの 1 つであるから外積を用いても同じ結果を得る。(ここまで)

（4） 2 つの平面 $x+y-2=0$，$x+2y-2z+3=0$ のなす角 $\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

（5） 2 つの点 $A(-2,-1,1)$，$B(2,5,3)$ を直径の両端とする球について，次の問いに答えよ。
［1］ 球の方程式（標準形）を求めよ。
［2］ A における接平面の方程式（問題1（2）と同じ形）を求めよ。
［3］ B における接平面の方程式（問題1（2）と同じ形）を求めよ。

（6） 方程式 $x^2+y^2+z^2+2x-2y+az+b=0$ が中心 $(-1,1,-3)$，半径 3 の球を表すように定数 $a$，$b$ の値を定めよ。 ［1］ $a$ ［2］ $b$

（7） 四面体 OABC で $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right)$ で定まる点を P，直線 CP と三角形 OAB の交点を Q とするとき，次の問いに答えよ。
［1］ $\overrightarrow{CQ}=t\overrightarrow{CP}$ として，$\overrightarrow{CQ}$ を $t$，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ で表せ。
［2］ $\overrightarrow{OQ}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ として，$\overrightarrow{CQ}$ を $m$，$n$，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ で表せ。
［3］ ［1］，［2］の結果から $t$，$m$ の値を求めよ。 <1> $t$ <2> $m$

２．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) 点 A(1, 2, 3) について, 次の点の座標を求めよ。

[1] $zx$ 平面に対して対称な点 P　　[2] 原点に関して対称な点 Q

(2) 2つの点 (−3, −1, 6), (−6, 5, 3) の間の距離を求めよ。

(3) 2つの点 (1, −2, −3), (−1, 0, $z$) の間の距離が 4 であるとき, $z$ の値を求めよ。

(4) $\vec{a}=(-2,1,0)$, $\vec{b}=(1,-1,1)$ のとき, 次の各ベクトルの大きさを求めよ。

[1] $\vec{a}-\vec{b}$　　[2] $2\vec{a}+3\vec{b}$

(5) 2つの点 A(1, −4, −3), B(−4, 6, 2) について, 次の点の座標を求めよ。

[1] 線分 AB を 2:3 の比に内分する点 P　　[2] 線分 AB を 2:3 の比に外分する点 Q

(6) 次の2つのベクトルの内積を計算せよ。

[1] $\vec{a}=(1,2,1)$, $\vec{b}=(2,-1,-3)$　　[2] $\vec{a}=(4,-5,6)$, $\vec{b}=(-1,0,1)$

(7) 次の2つのベクトルの外積を計算せよ。

[1] $\vec{a}=(1,2,1)$, $\vec{b}=(2,-1,-3)$　　[2] $\vec{a}=(4,-5,6)$, $\vec{b}=(-1,0,1)$

(8) 次の2つのベクトルのなす角 $\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\pi\right)$ を求めよ。

[1] $\vec{a}=(-1,0,-1)$, $\vec{b}=(2,2,1)$　　[2] $\vec{a}=(1,-3,2)$, $\vec{b}=(2,4,5)$

(9) 1辺の長さが $L$ である正四面体 OABC において, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とするとき, 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。(注意：[ 2 ] は $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で答えよ)

(ここから) 三角形 ABC の重心を G とすれば $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=[\ 1\ ]\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$ だから

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AB}}=[\ 1\ ]\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\bullet([\ 2\ ])=[\ 1\ ]\left(\vec{b}\bullet\vec{c}-\vec{a}\bullet\vec{c}\right)$ … ①, ここで

$\vec{b}\bullet\vec{c}=\vec{a}\bullet\vec{c}=L^2\cos[\ 3\ ]=[\ 4\ ]L^2$ だから, これと①より $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ となる。(ここまで)

(10) 次の直線の方程式を $\dfrac{x-a}{v_1}=\dfrac{y-b}{v_2}=\dfrac{z-c}{v_3}$ の形で答えよ。

[1] 2つの点 (1, −2, −1), (−2, 1, 3) を通る直線。

[2] 点 (−1, 1, 1) を通り, ベクトル $\vec{v}=(1,-2,3)$ に平行な直線。

3. 次の2つの点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。ただし, 答のみ。(2点)

(1) A(1, −3, 5), B(4, 1, 5)　　(2) A(1, −2, 5), B(1, 3, 4)

4. ベクトルの組 $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(-1,0,1)$, $\vec{c}=(1,2,1)$ が線形独立かどうか消去法を用いて調べよ。指示に従わない解答には点を与えない。(7点)

5. 次の証明の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし, 答のみ。(5点)

(ここから) $\left|\vec{a}\bullet\vec{b}\right|\leqq\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$ を証明する。$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ ならば明らかに成り立つ。

$\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{b}\neq\vec{0}$ とする。$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を $\theta$ とすれば $\vec{a}\bullet\vec{b}=(\ 1\ )$, $\left|\cos\theta\right|\leqq(\ 2\ )$ だから

$\left|\vec{a}\bullet\vec{b}\right|=\left|(\ 1\ )\right|\leqq\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$ となる。等号成立は $\theta=0$, $(\ 3\ )$ (ラジアンで答える) のときだから

$\vec{b}=(\ 4\ )$ ($k$ は実数) のときに限り成り立つ。これを用いて $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\leqq\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$ を証明する。

$\left(\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\right)^2-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=2((\ 5\ ))\geqq0$ $\therefore\left(\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\right)^2\geqq\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2$ (ここまで)

6．２平面 $\alpha : x+2y-z-4=0$，$\beta : x-y+2z-4=0$ について，次の各問いに答えよ。(11点)
(首都大東京 改)

(1) 連立１次方程式 $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ x-y+2z=4 \end{cases}$ を消去法を用いて解くことにより，$\alpha$ と $\beta$ の交線 $l$ の方程式を求めよ。指示に従わない解答には点を与えない。

(2) 次は (1) の直線 $l$ を含み点 $\mathrm{A}(2,3,4)$ を通る平面 $\gamma$ の方程式を求める計算である。括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。

(ここから) $l$ の方程式を媒介変数 $t$ を用いて表せば $x=[\ 1\ ]$，$y=[\ 2\ ]$，$z=t$ となる。$\gamma$ は点 A を通るのでその方程式は $a(x-2)+b(y-3)+c(z-4)=0$ となりこれに $l$ の媒介変数 $t$ による方程式を代入して整理すれば $([\ 3\ ])t+2a-3b-4c=0$ となる。これが任意の実数 $t$ に対して成り立つから連立方程式 $\begin{cases} [\ 3\ ]=0 \\ 2a-3b-4c=0 \end{cases}$ が導かれ，これを解いて $(a,b,c)\neq\vec{0}$ となるものを１つ求めれば $\gamma$ の方程式は $x+[\ 4\ ]y+[\ 5\ ]z=[\ 6\ ]$ となる。(ここまで)

7．原点 O，点 $\mathrm{A}(1,0,0)$，$\mathrm{B}(0,1,0)$，$\mathrm{C}(0,0,1)$ を頂点とする四面体 OABC について，次の各問いに答えよ。(13点) (豊橋技大 改)

(1) 点 $\mathrm{P}(a,b,c)$ と次の平面との距離を求めよ。ただし，答のみ。

[1] $xy$ 平面　[2] $yz$ 平面　[3] $zx$ 平面

(2) ３点 A，B，C を通る平面 $\sigma$ の方程式を求めよ。ただし，答のみ。

(3) (1) の点 P と (2) の平面 $\sigma$ との距離を求めよ。ただし，答のみ。

(4) 四面体 OABC に内接する球の体積 $V$ を求めよ。

8．２つの直線 $l_1 : \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-3}{4}$，$l_2 : \dfrac{x-3}{8}=y+7=\dfrac{z+2}{-5}$ について，次の各問いに答えよ。(12点) (名古屋工業大 改)

(1) 直線 $l_1$ を含み，直線 $l_2$ と平行な平面 $\alpha$ の方程式を求めよ。

注意：直線を含むとはその直線が平面上にあること，直線と平行とは平面の法線ベクトルが直線の方向ベクトルと垂直になることである。

(2) $l_1$ と $l_2$ の距離を求めよ。ただし，答のみ。

注意：$l_1$ と $l_2$ の距離とは，$l_1$，$l_2$ 上の点をそれぞれ $\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2$ とするとき，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さの最小値である。