2017年度前期末試験問題・線形代数Ｉ（M2）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば
$x^2+2x-3=$ (１) $(x-1)$ となっていたら (１) の正解は $(x+3)$ であり，((１)) $(x-1)$
となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは０点とする。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 次の文章の［　　］に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) AB＝AC の二等辺三角形において，辺 BC の中点を M とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすれば，$\overrightarrow{AM}=$［ １ ］，$\overrightarrow{BC}=$［ ２ ］であるので，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\Big($［ ３ ］$^2-$［ ４ ］$^2\Big)=$［ ５ ］

$\Big(\because$ 仮定から［ ３ ］＝［ ４ ］$\Big)$ 従って AM⊥BC (ここまで)

（2） 次の直線の媒介変数 t による方程式を求めよ。

［1］ 点 $(1,-1)$ を通り，方向ベクトルが $(-3,2)$ の直線

［2］ ２点 $\mathrm{A}(2,5)$，$\mathrm{B}(7,-3)$ を通る直線

（3） 直線 $y=-\dfrac{2}{7}x-1$ について，次のベクトルを１つ求めよ。

［1］ 法線ベクトル　　［2］ 方向ベクトル

（4） 次の点と直線の距離を求めよ。

［1］ 点 $(-3,2)$ と直線 $y=-2x+3$　　［2］ 原点と直線 $y=\dfrac{1}{2}(3x-5)$

（5） ３点 $\mathrm{A}(0,1)$，$\mathrm{B}(5,-2)$，$\mathrm{C}(3,4)$ について，次のものを求めよ。

［1］ 直線 AB の方程式　　［2］ 点 C と直線 AB の距離　　［3］ ⊿ABC の面積

（6） $\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(1,-1)$ のとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ の線形結合で表せ。

［1］ $(-3,5)$　　［2］ $(-1,3)$

（7） $\vec{a}$，$\vec{b}$ が線形独立であるとき，次の等式が成り立つように x，y の値を求めよ。

［1］ $2\vec{a}+x\vec{a}-3\vec{b}=y\vec{a}-(2-x)\vec{b}$　　［2］ $(x+y)\vec{a}+(x-y)\vec{b}=-y\vec{a}-\vec{a}+2\vec{b}$

２．⊿OAB において，辺 AB を $1:p$ の比に内分する点を L，辺 OB を $1:q$ に内分する点を M とし，線分 OL と線分 AM の交点を P とするとき，AP と PM の比を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，p，q は正の数である。ただし，答のみ。(11点)

(ここから) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。また，AP : PM＝$1:r$ とすれば内分点の位置ベクトルの公式から，$\overrightarrow{OL}=$(１)$\vec{a}+$(２)$\vec{b}$ … ①，$\overrightarrow{OP}=$(３)$\vec{a}+$(４)$\overrightarrow{OM}=$(３)$\vec{a}+$(５)$\vec{b}$ … ②

一方 $\overrightarrow{OP}\,/\!/\,\overrightarrow{OL}$ だから，$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OL}=t(１)\vec{a}+t(２)\vec{b}$ … ③ となる。②，③および $\vec{a}$，$\vec{b}$ が線形独立であることから $\begin{cases} t\,(\ 1\ )=(\ 3\ ) \\ t\,(\ 2\ )=(\ 5\ ) \end{cases}$，これから t を消去して r を p，q のみで表せば

$r=$(６) となる。従って，AP : PM＝$1:$(６)＝(７)$:p$ となる。特に $p=\dfrac{2}{3}$，$q=1$ のとき

AP : PM を最も簡単な整数比で表せば（ 8 ）となる。

3．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(14点)

(1)　3点 A(−1, 0), B(2, −1), C(x, y) と負の実数 k について，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=20$ が成り立つとき，次のものを求めよ。

[1] k の値　　[2] 点 C の座標

(2)　次の条件を満たすベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積を求めよ。ただし，θ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角である。

[1] $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$　　[2] $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$, $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$

(3)　次の２つのベクトルの内積を求めよ。

[1] $\vec{a}=(1, 3)$, $\vec{b}=(4, 2)$　　[2] $\vec{a}=\left(\sqrt{5}, -5\right)$, $\vec{b}=\left(\sqrt{10}, \sqrt{2}\right)$

(4)　次の２つのベクトルのなす角 θ を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする。(弧度法)

[1] $\vec{a}=(2, 3)$, $\vec{b}=(-2, -3)$　　[2] $\vec{a}=\left(1+\sqrt{3}, 2\right)$, $\vec{b}=\left(1-\sqrt{3}, 1\right)$

(5)　$\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ のとき，次の値を求めよ。

[1] $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2$　　[2] $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

(6)　平行四辺形 ABCD において，AB = 1, AD = 3, $\angle\mathrm{BAD}=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，辺 AC の長さを求めよ。

4．原点 O と点 A(3, 1) に対して，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-6\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=0$ 満たす点 P は円を描くことを証明せよ。また，この円の中心の座標と半径の値を求めよ。(6点)

5．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(19点)

(1)　4点 A(−4, −1), B(2, 2), C(x, y), D(−2, 2) を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形となるように点 C の座標を求めよ。

(2)　$\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=2\sqrt{13}$ のとき，次のものを求めよ。

[1] $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値　　[2] $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角の値　(弧度法)

(3)　⊿ABC において，辺 BC の中点を M とするとき，次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とし，$\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて答えよ。

(ここから) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ = [1], $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ = [2] より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|^2$ = [3] $\left|\vec{b}\right|^2+\dfrac{1}{2}$ [4] + [3] $\left|\vec{c}\right|^2$,

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right|^2$ = [3] $\left|\vec{b}\right|^2$ + ([5]) + [3] $\left|\vec{c}\right|^2$ となるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right|^2$ = [6]
(ここまで)

(4)　線分 AB と点 P に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，O は原点とする。

(ここから) $3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+6\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{0}$ を満たすとき，これから [1] $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ + [2] $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{0}$ が導かれ，よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ = [3] $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ + [4] $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるから P は線分 AB を [5] の比に内分する点と

なる。(ここまで)

（5）（4）と同様に考えると，$3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{0}$ を満たす点 P は線分 AB をどのような比に内分する点か。

6．⊿OAB と点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{b}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{c}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ … ① が成り立つものとする。ただし，a，b，c は正の定数で $b+c<a$ を満たすとする。このとき，次の問いに答えよ。(25点) (大阪大 改)

（1）線分 OB と AP の延長線の交点を C とする。OC：CB＝1：m となる m を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。

(ここから) m を用いれば $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=[\ 1\ ]\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ … ② である。一方，条件①を用いれば

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}=([\ 2\ ])\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}=([\ 3\ ])\overrightarrow{\mathrm{OA}}+[\ 4\ ]\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ … ③

となる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は線形独立だから②，③より $\begin{cases}[\ 3\ ]=0 & \cdots ④\\ [\ 1\ ]=[\ 4\ ] & \cdots ⑤\end{cases}$ となる。

④より $t=[\ 5\ ]$，これを⑤に代入して m を求めれば $m=[\ 6\ ]$ となる。(ここまで)

（2）線分 OA と BP の延長線の交点を D とする。OD：DA＝1：n となる n を（1）と同じように求めよ。

（3）線分 OP，AB，CD の中点をそれぞれ E，F，H とするとき，この３点が一直線上にあることの証明が次の文章である。括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。

(ここから) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=[\ 1\ ]\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=[\ 2\ ]\left(b\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+c\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=[\ 3\ ]\overrightarrow{\mathrm{OA}}+[\ 4\ ]\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=[\ 5\ ]\overrightarrow{\mathrm{OA}}+[\ 6\ ]\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ … ②

$\overrightarrow{\mathrm{FH}}=[\ 7\ ]\overrightarrow{\mathrm{OA}}+[\ 8\ ]\overrightarrow{\mathrm{OB}}=[\ 9\ ]\left((a-b)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(a-c)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ … ③

②，③より $\overrightarrow{\mathrm{FH}}=[\ 10\ ]\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ となるので $\overrightarrow{\mathrm{FH}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{FE}}$，つまり E，F，H は一直線上にある。(ここまで)