2017年度前期中間試験問題・線形代数Ｉ（M2）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら（ 1 ）の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 双曲線 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{12}=1$ について次の問いに答えよ。

［1］ 頂点の座標を求めよ。　［2］ 中心の座標を求めよ。　［3］ 主軸の長さを求めよ。

［4］ 焦点の座標を求めよ。　［5］ 漸近線の方程式を求めよ。

［6］ この双曲線の接線で，傾きが 3 であるものを求めよ。

［7］ 不等式 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{12}\geqq 1$ の表す領域を図示せよ。注意：［1］の点，［5］の直線を図内に書け。漸近線は破線とする。他に軸のラベル，原点も明記し，境界を含むか否かも書け。

（2） 連立不等式 $\begin{cases} x^2+4y^2\leqq 9 & \cdots ① \\ 4x^2+y^2\leqq 9 & \cdots ② \end{cases}$ について次の問いに答えよ。

［1］ ①の表す領域の境界と②の表す領域の境界の共有点の座標をすべて求めよ。

［2］ 問題の連立不等式の表す領域を図示せよ。注意：各領域の境界と軸との交点を図内に書け。他に軸のラベル，原点も明記し，境界を含むか否かも書け。

（3） 楕円 $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{16}=1$ について次のものを求めよ。

［1］ 頂点の座標　［2］ 長軸の長さ　［3］ 短軸の長さ　［4］ 焦点の座標

［5］ この楕円の接線で，y 軸との切片が -5 であるもの

２．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 放物線 $y^2=-8x$ について次の問いに答えよ。

［1］ 軸の方程式を求めよ。　［2］ 頂点の座標を求めよ。　［3］ 焦点の座標を求めよ。

［4］ 準線の方程式を求めよ。

［5］ この放物線の接線で，傾きが m であるものを求めよ。なお，$m\neq 0$ とする。

［6］ 不等式 $y^2>-8x$ の表す領域を図示せよ。注意：［3］の点，［4］の準線を図内に書け。他に軸のラベル，原点も明記し，境界を含むか否かも書け。

（2） 漸近線が $y=\pm 2x$ で，点 $(0, 1)$ を通る双曲線について次のものを求めよ。

［1］ 主軸の長さ　［2］ 焦点の座標　［3］ 双曲線の方程式

［4］ この双曲線の接線で，y 軸との切片が $-\dfrac{1}{2}$ であるもの

［5］ この双曲線を境界にもち，その中心を内部に含む領域を表す不等式。ただし，境界は含まない。

（3） 中心が直線 $y=-x$ 上にあり，2点 $\mathrm{A}(4, 6)$，$\mathrm{B}(-2, 4)$ を通る円について次のものを求めよ。

［1］ 線分 AB の垂直二等分線の方程式　［2］ ［1］と直線 $y=-x$ の交点 C の座標

［3］ この円の方程式　［4］ この円周上の点 $\left(5\sqrt{3}+4,\ 1\right)$ における接線の方程式

3．$a>0,\ b>0,\ c=\sqrt{a^2+b^2}$ とすると，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の２焦点は F$(c,\ 0)$，F$'(-c,\ 0)$ となる。このとき，この双曲線上の任意の点 P$(x,\ y)$ について，$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'|=2a$ が成り立つことを証明する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(14点)

(ここから) $\mathrm{PF}=\sqrt{(\ 1\ )}$，$\mathrm{PF}'=\sqrt{(\ 2\ )}$ であるから

$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'|^2=2((\ 3\ ))-2\sqrt{(\ 1\ )}\sqrt{(\ 2\ )}$ … ①　双曲線の方程式と $a,\ b,\ c$ の関係式を用いれば，$(\ 3\ )=\dfrac{(\ 4\ )}{a^2}$ … ②（右辺の (4) は $x,\ a,\ c$ のみの式）となる。また

$((\ 1\ ))\times((\ 2\ ))=((\ 3\ ))^2-(\ 5\ )$ であるから②を用いてさらに計算すると

$((\ 3\ ))^2-(\ 5\ )=\dfrac{\left((\ 6\ )-c^2x^2\right)^2}{a^4}$ … ③（右辺の (6) は a のみの式）

ここで $c^2x^2-(\ 6\ )\geqq((\ 7\ ))^2>0$ なので $\left|(\ 6\ )-c^2x^2\right|=(\ 8\ )$ … ④ となる。④に注意しながら②，③を①に代入して計算すると $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'|^2=4a^2$ となり証明された。(ここまで)

4．円 $x^2+y^2-6x-10y+21=0$ … ① と，この円上の点 A$(1,\ 2)$ について，次の問いに答えよ。ただし，(1)，(2) は答のみ。(11点)

(1) ①の円の中心 C の座標を求めよ。　(2) ①の円の半径の値を求めよ。

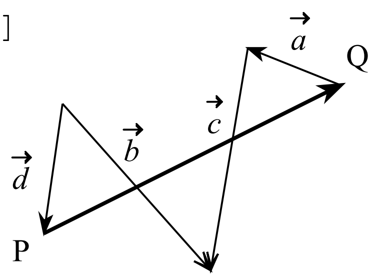
(3) 点 A における①の円の接線 l の方程式を求めよ。

5．$x,\ y$ が連立不等式 $2x+y\leqq 8,\ x+3y\leqq 6,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$ を満たすとき，$7x+6y$ の最大値とそれを与える $x,\ y$ の値を求めよ。(11点)

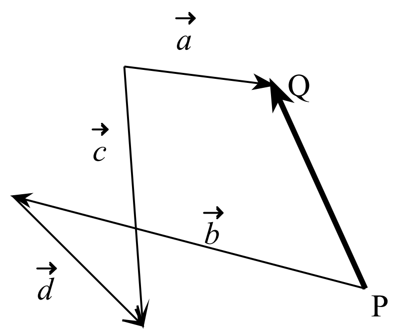
6．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(6点)

(1) 次の図でベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ で表せ。

［1］



［2］



(2) 平行四辺形 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b},\ \vec{d}$ を用いて表せ。

［1］ $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　［2］ $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

７．不等式 $(x^2-y)(x-y+2) \leqq 0$ の表す領域を図示せよ。(8点)