2014年度前期中間試験問題・数学B（M2） 2014年6月9日

１．放物線 $y^2=-x$ について次の問いに答えよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（1） 焦点の座標を求めよ。　（2） 準線の方程式を求めよ。

（3） 焦点を通り軸と垂直な直線と放物線との交点の座標を求めよ。

（4） 傾きが -2 の接線の方程式を求めよ。

（5） この放物線を y 軸方向に -2 だけ平行移動させた放物線の方程式を求めよ。

２．中心が $(-2, 3)$ で点 $(1, 4)$ を通る円について次の問いに答えよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（1） この円の方程式を求めよ。

（2） 点 $(1, 4)$ における接線の方程式を求めよ。

３．双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ について次の問いに答えよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（1） 主軸の長さを求めよ。　（2） 焦点の座標を求めよ。

（3） 漸近線の方程式を求めよ。

（4） 傾きが 2 の接線の方程式を求めよ。

４．中心が原点で、2 点 $(4, 2)$, $(-6, 1)$ を通り、頂点が座標軸上にある楕円について次の問いに答えよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（1） この楕円の方程式を求めよ。

（2） 長軸の長さを求めよ。　（3） 焦点の座標を求めよ。

５．2 点 $A(-3, 2)$, $B(5, -6)$ からの距離の比が $1:3$ である点の軌跡を求めよ。

６．次の問いに答えよ。

（1） 連立不等式 $y \geqq -2$, $x \geqq y^2+4y$, $y \geqq x-4$ の表す領域を図示せよ。ただし、<u>答のみ</u>。

注意： 図はていねいに描くこと。また各境界線と軸との交点、各境界線の共有点の座標も図に明記すること。雑な図、交点、共有点の座標の記載がないものは大きく減点する。また座標軸のラベルの無いものも減点する。

（2） （1）で求めた領域内の点 (x, y) に対して $3y-x$ の最大値とそれを与える x および y の値を求めよ。

７．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求める。以下の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

$x_0 \neq \pm a$ のとき求める接線の傾きを m とすれば、その方程式は $y=($ 1 $)$ となる。これを楕円の方程式に代入して整理し、x の 2 次方程式を求めれば

$(($ 2 $))x^2+2a^2m(($ 3 $))x+a^2\left\{(($ 3 $))^2-($ 4 $)\right\}=0$ となる。ただし、(2)～(4) は x を含まない。この 2 次方程式の判別式を D と表す。$\dfrac{D}{4}=0$ という m の 2 次方程式を導くと

((　5　))m^2+(　6　)m+(　7　)=0 となる。ただし、(　5　)~(　7　)はmを含まない。この判別式を$\widetilde{D}$と表し計算すると $\dfrac{\widetilde{D}}{4}=a^2b^2$((　8　))となる。点$\left(x_0, y_0\right)$が楕円上の点だから$\widetilde{D}$=(　9　)という値になるので$m$=(　10　)と求まる。ただし、(　10　)は$a, x_0, y_0$の式である。これを(　1　)に代入して接線の方程式を求めると、((　11　))$y+x_0y_0\left(x-x_0\right)$-((　11　))$y_0=0$ となる。
再び$\left(x_0, y_0\right)$は楕円上の点だから(　11　)=(　12　)となる。(　12　)はa, b, y_0の式である。
つまり接線の方程式は(　12　)$y+x_0y_0\left(x-x_0\right)$-(　12　)$y_0=0$ となる。条件より$y_0 \neq 0$ だからこの式の両辺をy_0で割ると(　13　)$y+x_0x-x_0{}^2$-(　12　)=0 となる。さらに両辺をa^2で割って(　14　)=1 ときれいな式が導けた。なお最後に再び$\left(x_0, y_0\right)$が楕円上の点であることを用いた。
$x_0=\pm a$ $\left(\text{即ち} y_0=0\right)$のときも、この方程式が使えることは容易に確認できる。

8．楕円 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ と双曲線 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{12}=1$ について、次の問いに答えよ。

(1)　問題の楕円の焦点の座標を求めよ。ただし、答のみ。
(2)　問題の双曲線の焦点の座標を求めよ。ただし、答のみ。
(3)　問題の双曲線の漸近線の方程式を求めよ。ただし、答のみ。
(4)　問題の２つの曲線の共有点の座標を求めよ。**(解法をかけ)**
(5)　$\left(\dfrac{x^2}{9}+y^2-1\right)\left(\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{12}-1\right) \geqq 0$ の表す領域を図示せよ。ただし、答のみ。

注意：問題６(1)と同じ。ただし、共有点の座標は図の中に記載する必要なし。ただし、双曲線の漸近線を点線で書き込め。漸近線が書き込んでない解答は大きく減点する。

(6)　問題の楕円と双曲線の焦点は、(5)の表す領域内にあるか外にあるか、次の選択肢から正しいものを１つ選んで文章をそのまま解答用紙にかけ。ただし、答のみ。
楕円および双曲線の焦点は両方とも領域内にある。
楕円および双曲線の焦点は両方とも領域外にある。
楕円の焦点は領域内に、双曲線の焦点は領域外にある。
楕円の焦点は領域外に、双曲線の焦点は領域内にある。

(7)　(4)で求めた共有点のうち第１象限にある点をAとする。Aにおける問題の楕円の接線の方程式を問題７の結果を用いて求めよ。