線形写像の像空間と核

○ 線形写像の定義

一般のベクトル空間での線形写像の定義を述べる。こちらが本質的。

> 定義（線形写像・線形変換）
> V, W を実ベクトル空間（スカラーが実数）とする。V から W への写像 f がつぎの条件を満たすとき、f を V から W への線形写像または一次写像という。
> （1） $f\left(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2\right)=f\left(\boldsymbol{a}_1\right)+f\left(\boldsymbol{a}_2\right) \quad \left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in V\right)$
> （2） $f\left(k\boldsymbol{a}\right)=kf\left(\boldsymbol{a}\right) \quad \left(k \in \mathrm{R}, \boldsymbol{a} \in V\right)$
> とくに $W=V$ のとき、f を V 上の線形変換または一次変換という。また上の（1），（2）の性質を線形性という。

例： 高々 n 次の実係数整式全体 $P\left(n;\mathrm{R}\right)$ は通常の関数の和、定数倍によってベクトル空間の構造を持っていた。いま、$V=P\left(n;\mathrm{R}\right)$, $W=P\left(n-1;\mathrm{R}\right)$ とし、V から W への写像 f を

$$f: V \to W, \ f\left(p\left(x\right)\right)=\frac{dp}{dx} \quad （即ち、p\left(x\right) の導関数を対応させる）$$

と定義すれば微分の性質からこの f は V から W への線形写像となる。（確認してご覧）

またこの場合、$W=V$ 即ち、$W=P\left(n;\mathrm{R}\right)$ としてもよい。つまり $f: V \to V$ として線形変換と考えることができる。

注意： 線形写像の定義の条件（1），（2）は次のように１つにまとめることができる。

$$f\left(k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2\right)=k_1f\left(\boldsymbol{a}_1\right)+k_2f\left(\boldsymbol{a}_2\right) \quad \left(k_1, k_2 \in \mathrm{R}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in V\right)$$

このことを確認してご覧。つまり（1），（2）を仮定して上式が成り立つことを示し、逆に上式を仮定して（1），（2）が成り立つことを示してご覧。

○ 像空間と核

$f: V \to W$ が線形写像、V_0 が V の部分空間、W_0 が W の部分空間とする。このときつぎのことがいえる。

（1） V_0 の元（ベクトル）の f による像全体、即ち

$$f\left(V_0\right)=\left\{ f\left(\boldsymbol{a}\right) \,\middle|\, \boldsymbol{a} \in V_0 \right\} \quad （右辺の集合を左辺の記号で表す）$$

は W の部分空間になる。（証明してご覧）また、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が V_0 の生成系、即ち

$V_0=\left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \right\rangle$ ならば、$f\left(V_0\right)=\left\langle f\left(\boldsymbol{a}_1\right), f\left(\boldsymbol{a}_2\right), \cdots, f\left(\boldsymbol{a}_r\right) \right\rangle$ （これは明らか）

よって、$dim\, V_0=p \Rightarrow dim\, f\left(V_0\right) \leqq p$ である。（$dim\, f\left(V_0\right)=p$ ではない）

特に、$V_0=V$ のとき、即ち、$f\left(V\right)$ を単に線形写像 f の像空間という。

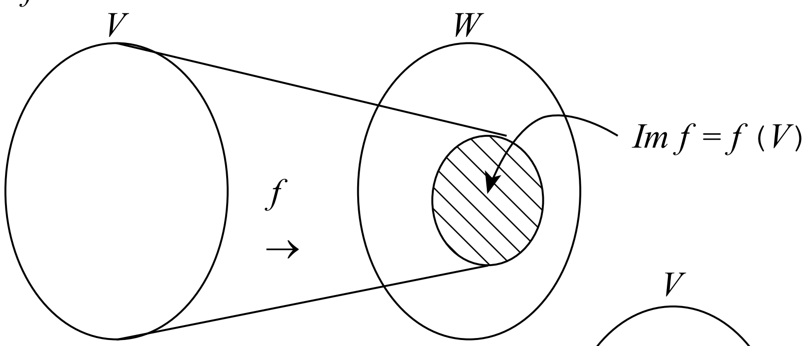
（2） f により W_0 の元（ベクトル）に写される V の元全体、即ち、

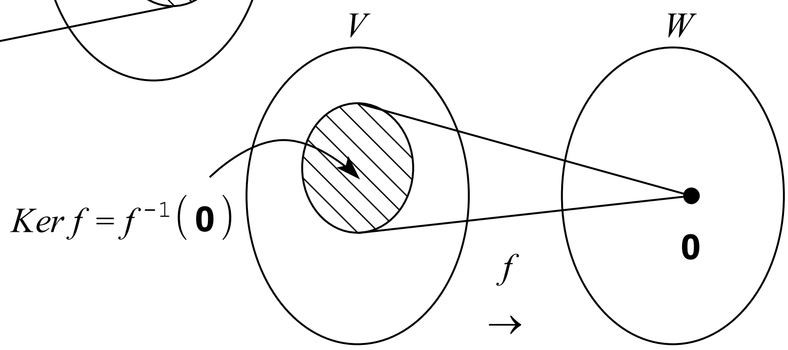
$$f^{-1}\left(W_0\right)=\left\{ \boldsymbol{a} \in V \,\middle|\, f\left(\boldsymbol{a}\right) \in W_0 \right\} \quad （右辺の集合を左辺の記号で表す）$$

は V の部分空間になる。（証明してご覧） 特に、$W_0=\left\{\boldsymbol{0}\right\}$ （零ベクトルのみの集合は W の部分空間である） 即ち、$f^{-1}\left(\boldsymbol{0}\right)$ を線形写像 f の核という。

> 定義（像空間・核）
> $f : V \to W$ が線形写像のとき、$f(V)$ を f の像空間といい、記号で $Im\, f$ と表し
> $f^{-1}(\mathbf{0})$ を f の核といい、記号で $Ker\, f$ と表す。
> $Im\, f = W$ が成り立つとき、f を全射という。また、$Ker\, f = \{\mathbf{0}\}$ のとき、f を単射という。

$Im\, f$, $Ker\, f$
の概念。





さらに次の記号を定義する。（右辺の値を左辺の記号で表す）

> 定義（階数・退化次数）
> $Im\, f$ の次元を線形写像 f の階数といい、$rank(f)$ と表す。また $Ker\, f$ の次元を f の退化次数といい、$nul(f)$ で表す。即ち、
> $rank(f) = dim(Im\, f)$ ， $nul(f) = dim(Ker\, f)$

注意： 線形写像の階数と行列の階数および線形写像の核と行列の核はまったく同じ概念になる。これはあとで説明する。

例： $f : P(n ; \mathrm{R}) \to P(n-1 ; \mathrm{R})$ で $f(p(x)) = \dfrac{dp}{dx}$

とすれば、$Im\, f = P(n-1 ; \mathrm{R})$ であるから上への写像である。
また $rank(f) = dim(P(n-1 ; \mathrm{R})) = n$ である。$Ker\, f = P(0 ; \mathrm{R})$ であるから、
$nul(f) = dim(P(0 ; \mathrm{R})) = 1$ である。

注意： $dim(P(n ; \mathrm{R})) = n+1$ であり、基底は $1, x, x^2, \cdots, x^n$ である。即ち、
$P(n ; \mathrm{R}) = \langle 1, x, x^2, \cdots, x^n \rangle$ なお、$P(0 ; \mathrm{R}) = <1>$ つまり定数関数全体である。

次の定理は非常に重要であり、次元定理と呼ばれている。

定理（次元定理）

$f : V \to W$ を線形写像とし、V は有限次元とする。このとき次のことが成り立つ。

$dim\ V = rank\ (f) + nul\ (f) = dim\ (Im\ f) + dim\ (Ker\ f)$

つまり、f の像の次元と f の核の次元を加えたものが f の定義域にあたるベクトル空間 V の次元と一致する。

［証明］ $dim\ V = n$, $nul\ (f) = r$ とし、$f^{-1}\left(\mathbf{0}\right)$ の基底を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ とする。
これに 適当な $n - r$ 個のベクトルを加えて、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が V の基底 になるようにする。（このようなことができることの証明は省略する）任意の $\boldsymbol{a} \in V$ は

$$\boldsymbol{a} = k_1 \boldsymbol{a}_1 + k_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r \boldsymbol{a}_r + k_{r+1} \boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + k_n \boldsymbol{a}_n$$

と表せるので、$f\left(\boldsymbol{a}\right) = f\left(k_1 \boldsymbol{a}_1 + k_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r \boldsymbol{a}_r + k_{r+1} \boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + k_n \boldsymbol{a}_n\right)$

$= f\left(k_1 \boldsymbol{a}_1 + k_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r \boldsymbol{a}_r\right) + k_{r+1} f\left(\boldsymbol{a}_{r+1}\right) + \cdots + k_n f\left(\boldsymbol{a}_n\right)$

$k_1 \boldsymbol{a}_1 + k_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r \boldsymbol{a}_r \in f^{-1}\left(\mathbf{0}\right)$ より、$f\left(k_1 \boldsymbol{a}_1 + k_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r \boldsymbol{a}_r\right) = \mathbf{0}$

$\therefore f\left(\boldsymbol{a}\right) = k_{r+1} f\left(\boldsymbol{a}_{r+1}\right) + \cdots + k_n f\left(\boldsymbol{a}_n\right)$ つまり、$Im\ f = \left\langle f\left(\boldsymbol{a}_{r+1}\right), \cdots, f\left(\boldsymbol{a}_n\right)\right\rangle$

従って、$f\left(\boldsymbol{a}_{r+1}\right), \cdots, f\left(\boldsymbol{a}_n\right)$ が線形独立であることを示せばよい。さすれば $rank\ (f) = n - r$ となるから定理の等式が示せたことになる。

$$\alpha_{r+1} f\left(\boldsymbol{a}_{r+1}\right) + \cdots + \alpha_n f\left(\boldsymbol{a}_n\right) = \mathbf{0}$$

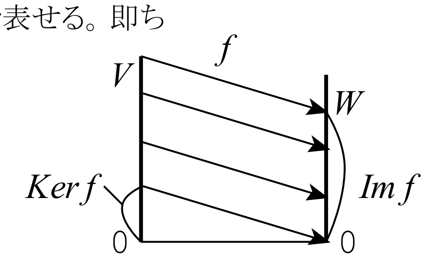
とすれば左辺は線形写像の性質から

$f\left(\alpha_{r+1} \boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n\right) = \mathbf{0}$ 従って、$\alpha_{r+1} \boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n \in f^{-1}\left(\mathbf{0}\right)$

よって $\alpha_{r+1} \boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の線形結合で表せる。即ち

$$\alpha_{r+1} \boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \beta_r \boldsymbol{a}_r$$

$$\therefore\ \beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \beta_r \boldsymbol{a}_r - \alpha_{r+1} \boldsymbol{a}_{r+1} - \cdots - \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$$



$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は V の基底で線形独立だから、

$\alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_n = 0 \quad \therefore f\left(\boldsymbol{a}_{r+1}\right), \cdots, f\left(\boldsymbol{a}_n\right)$ は線形独立である。 （証終）

○ 同型写像

V , W がともに実ベクトル空間（スカラーが実数）であり、$\phi : V \to W$ を線形写像とする。このとき $Im\ \phi = W$, $Ker\ \phi = \left\{\mathbf{0}\right\}$ 即ち、全射かつ単射であるならばこの線形写像 ϕ を同型写像という。

注意： $\phi : V \to W$ が同型写像ならば、逆写像 $\phi^{-1} : W \to V$ が定義できる。ϕ^{-1} も線形写像である。

V から V 自身への同型写像を正則一次変換という。

V から W への同型写像が存在するとき、V と W は同型であるといい、

$$V \cong W$$

と表す。V が有限次元ならば $V \cong W \Rightarrow dim\ V = dim\ W$ が成り立つ。

［証明］ 仮定から同型写像 $\phi : V \to W$ が存在する。ϕ は全射であるから $Im\ \phi = W$ 即ち

$$rank(\phi) = dim(Im\ \phi) = dim\ W$$

また ϕ は単射でもあるので、$Ker\ \phi = \{\mathbf{0}\}$ 従って $nul(\phi) = 0$ 次元定理から

$$dim\ V = rank(\phi) + nul(\phi) = dim\ W + 0 = dim\ W$$ （証終）

実はこの逆も成り立つ。即ち、V, W が有限次元で $dim\ V = dim\ W$ ならば、$V \cong W$ となる。

［証明］ $dim\ V = dim\ W = n$ とし、それぞれの基底を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ とする。V から W への線形写像 ϕ を次のように定義する。

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{b}_i,\ \phi(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$Claim\,1 : Im\ \phi = W$

$\because$ W の任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ は基底を用いて $\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{b}_i$ と一意に表せるので V のベクトルとして

$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{a}_i$ を考えれば明らかに $\phi(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ となる。

$Claim\,2 : Ker\ \phi = \{\mathbf{0}\}$

$\because$ $\phi\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{b}_i = \mathbf{0}$ ならば、$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ は線形独立だから

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0 \quad \therefore \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}$$

以上より ϕ は V から W への同型写像になる。 （証終）

以上をまとめて次の定理を得る。

> 定理（同型条件）
> ２つの有限次元ベクトル空間 V, W が同型となるための必十条件は $dim\ V = dim\ W$ が成り立つことである。

例： $P(n; \mathrm{R}) \cong \mathrm{R}^{n+1}$ 同型写像として $P(n; \mathrm{R})$ の１組の基底 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ に対して

$$\phi\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

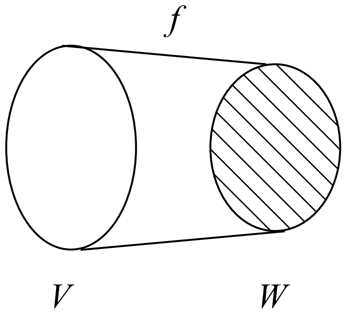
とすれば、ϕ は $P(n; \mathrm{R})$ から R^{n+1} への同型写像となる。

補足： 全射と単射について

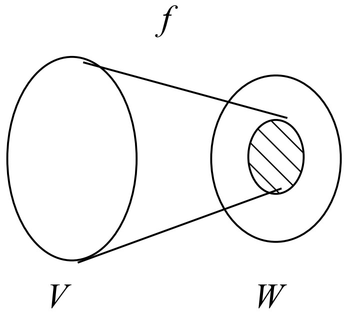
$f : V \to W$ を線形写像とする。全射とは、$Im\ f = W$ が成り立つこと、単射とは、$Ker\ f = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つことであった。これはどういうことを言っているのか元（ベクトル）で説明する。

全射： $Im\ f = W$ だから W の任意の元 $\boldsymbol{b} \in W$ に対して V の元 $\boldsymbol{a} \in V$ で f により $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$

となるものが少なくとも１つあることを意味している。



全射



全射でない場合

単射： $Ker\,f=\{\mathbf{0}\}$ とはどういうことであろうか。いま、V の２つのベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\in V$ の f による像が一致したとする。即ち、$f(\boldsymbol{a}_1)=f(\boldsymbol{a}_2)\Rightarrow f(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2)=\mathbf{0}$　（$\because f$ は線形写像）

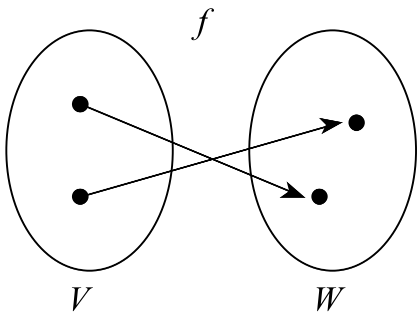
従って、$\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2\in Ker\,f=\{\mathbf{0}\}$ よって、$\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2=\mathbf{0}$ $\therefore\ \boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2$ つまり、

$$f(\boldsymbol{a}_1)=f(\boldsymbol{a}_2)\Rightarrow \boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2 \quad \cdots (*)$$

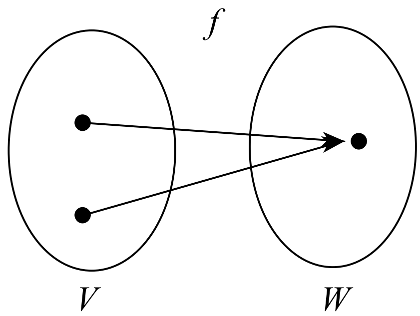
が成り立つ。逆に（*）が常に成り立てば $Ker\,f=\{\mathbf{0}\}$ がいえる。（確認してご覧）これを言葉にするなら「f により同じベクトルに写るならもとのベクトルは等しい」となる。（*）の対偶を考えるともっと分かりやすい。対偶は

$$\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{a}_2\Rightarrow f(\boldsymbol{a}_1)\neq f(\boldsymbol{a}_2)$$

となる。つまり「異なるベクトルは f により異なるベクトルに写る」となる。



単射



単射でない場合

例題１： 次の写像 f： $\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^3$ は線形写像か。

（1） f： $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} x+y \\ xy \\ 0 \end{pmatrix}$　　（2） f： $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 3x+y \\ 4x \\ x-2y \end{pmatrix}$

［解］（1） 線形写像でない。反例をあげる。$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$2\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ だから

$f(2\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$　一方、$2f(\boldsymbol{a})=2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$　$\therefore f(2\boldsymbol{a})\neq 2f(\boldsymbol{a})$

（2） $\begin{pmatrix} 3x+y \\ 4x \\ x-2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ だから線形写像である。　（解終）

例題２：次の線形写像 f について、$Im\, f$，$Ker\, f$ の基底を１組求めよ。

（1） f： $\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$， $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+3z \\ 2x+3y+4z \end{pmatrix}$

（2） f： $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$， $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \left(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \right)$

［解］（1） 標準基底による行列を用いると $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ となるから、$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ の階数を求めて、$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\therefore\ rank\,(f) = dim\,(Im\, f) = 2$ よって １組の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ また次元定理から $nul\,(f) = dim\,(Ker\, f) = 3-2=1$ であり、上の基本変形の結果から、$x+y+3z=0$，$y-2z=0$ より、$z=t$（任意の実数）として、$y=2t$，$x=-5t$

従って、$Ker\, f$ の１組の基底は $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

（2） 同じく行列を用いると $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ だから、$rank\,(f) = 1$ １組の基底は (1) である。次元定理から $nul\,(f) = dim\,(Ker\, f) = n-1$

$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$ を解いて、$Ker\, f$ のベクトルは $\begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 - \cdots - nx_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ だから１組の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，$\cdots$，$\begin{pmatrix} -n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の $n-1$ 個のベクトルである。　　　（解終）

線形写像の行列表現

授業では n 次元数ベクトル空間 R^n ばかりを話題にして話しをすすめていたが、一度関数もベクトルと捉えて議論することができると話し、例として２次以下の整式全体（ $P(2;\mathrm{R})$ と表す）をベクトル空間として捉え、整式 $P(x)$ に対してその導関数 $P'(x)$ を対応させる変換は $P(2;\mathrm{R})$ から $P(2;\mathrm{R})$ への線形変換であると指摘した。さらに関数 $1, x, x^2$ は $P(2;\mathrm{R})$ の基底であり、この基底によって導関数を対応させる線形変換を表す行列も求めた。ただこの行列は基底を $1, x, x^2$ としたときのもので、別の基底、例えば $1, 1+x, 1+x+x^2$（これも $P(2;\mathrm{R})$ の基底となる）でこの行列を求めると別のものが求まる。具体的に計算してみよう。

基底が $1, x, x^2$ の場合

１を微分すると０だから、これを基底 $1, x, x^2$ で表せば、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。同様にして x を微分すると１だから、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ になり、x^2 を微分すると $2x$ だから、$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるので、このときの行列は

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

基底が $1, 1+x, 1+x+x^2$ の場合

$1 \to 0,\ 1+x \to 1,\ 1+x+x^2 \to 1+2x = (-1)1+2(1+x)$ となるから、求める行列は

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

この例のように同じ線形変換でも基底の選び方によりそれを表す行列は異なってくる。ここではこの一般論を解説しよう。これが表題：「線形写像の行列表現」の意味である。

注意：この例の解答を見ればわかるように、$P(2;\mathrm{R})$ に属するベクトルを微分すると、１次以下の整式全体となるので、$P(2;\mathrm{R})$ から $P(1;\mathrm{R})$ への線形<u>写像</u>と見ることもできる。$P(2;\mathrm{R})$, $P(1;\mathrm{R})$ の基底をそれぞれ $\{1, x, x^2\}$, $\{1, x\}$ とすれば、行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる。

○ 線形写像の行列表現

ここではベクトル空間 V, W はともに有限次元で、$\dim V = n$, $\dim W = m$ とする。f を V から W への線形写像とする。即ち

$$f : V \to W,\ f(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2) = k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + k_2 f(\boldsymbol{v}_2)$$

が任意のスカラー k_1, k_2 と V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に対して成り立つものとする。明らかに

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} k_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} k_i f(\boldsymbol{v}_i) \ \ for\ {}^\forall k_i \in \mathrm{R},\ {}^\forall \boldsymbol{v}_i \in V \ \ (i = 1, 2, \cdots, p) \ （p \text{ は任意の自然数}）$$

が成り立つ。V , W の１組の基底をそれぞれ $\left\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right\}$, $\left\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\right\}$ とする。

$f\left(\boldsymbol{a}_j\right)$ は W のベクトルだから $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ の線形結合で表せる。それを

$$f\left(\boldsymbol{a}_j\right)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{b}_i=a_{1j}\boldsymbol{b}_1+a_{2j}\boldsymbol{b}_2+\cdots+a_{mj}\boldsymbol{b}_m \quad \left(j=1, 2, \cdots, n\right)$$

とする。まとめると、

$$\left(f\left(\boldsymbol{a}_1\right) \ f\left(\boldsymbol{a}_2\right) \ \cdots \ f\left(\boldsymbol{a}_n\right)\right)=\left(\boldsymbol{b}_1 \ \boldsymbol{b}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_m\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdots ①$$

となる。右辺は $\left(\boldsymbol{b}_1 \ \boldsymbol{b}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_m\right)$ を形式的に数とみて左の $m\times n$ 行列との積と同じになる。以前から指摘しているように行列を列ベクトルを用いて表すと、このように形式的な積と結果が一致する。さて、次が大切である。いま、V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を基底を用いて、$\boldsymbol{v}=\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{a}_j$ と表されているとする。

$\boldsymbol{v}$ の f による像は W のベクトルなので、$f\left(\boldsymbol{v}\right)=\sum_{i=1}^{m} y_i\boldsymbol{b}_i$ と表せる。このとき、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdots ②$$

が成り立つ。証明してみよう。

$$f\left(\boldsymbol{v}\right)=f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{a}_j\right)=\sum_{j=1}^{n} x_j f\left(\boldsymbol{a}_j\right)=\left(f\left(\boldsymbol{a}_1\right) \ f\left(\boldsymbol{a}_2\right) \ \cdots \ f\left(\boldsymbol{a}_n\right)\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

①を用いればさらに与式は

$$\left(\boldsymbol{b}_1 \ \boldsymbol{b}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_m\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

上式を計算したとき、$\boldsymbol{b}_i$ の係数は $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ の第 i 行、即ち $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ であり、これが y_i に等しいから②が示せたことになる。そこで線形写像の行列表現を次のように定義する。

定義

線形写像 $f: V \to W$ において、V, W の１組の基底

$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}, \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\}$ に関する f の行列表現とは

$$f(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{b}_i = a_{1j}\boldsymbol{b}_1 + a_{2j}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{b}_m \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

であるときの $m \times n$ 型行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ である。

注意（1）定義からわかるように基底の並びも行列表現に関係する。つまり集合として同じでも並び方を変えれば表現は異なる。

注意（2）$V=\mathrm{R}^n, W=\mathrm{R}^m$ で、ともに標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}, \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$ を考えるときは $f: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m,\ f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ の行列 A が線形写像 f の行列表現になる。なお念のために申し添えると、同じ記号を用いているが R^n の標準基底は $n \times 1$ 型の列ベクトル、R^m の標準基底は $m \times 1$ 型の列ベクトルである。

例題１： $f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ なる線形写像 $f: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$ について、それぞれの基底を $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ としたときの f の行列表現を求めよ。

［解］ 基底を順に $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}, \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ と表す。

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\boldsymbol{b}_1 + 1\boldsymbol{b}_2,\ f(\boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{b}_1 + 5\boldsymbol{b}_2,\ f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = -1\boldsymbol{b}_1 + 7\boldsymbol{b}_2$$

だから、求める行列表現は $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ となる。　（解終）

［別解］ 求める行列表現を A とすれば、$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & f(\boldsymbol{a}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} A$ 即ち

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

（解終）

注意： この例題のように数ベクトル空間の間の線形写像の場合は、別解のような解法もできる。

例題２： 線形変換 $f: P(2;\mathrm{R}) \to P(2;\mathrm{R}),\ P(x) \mapsto e^x \dfrac{d}{dx}\left(e^{-x}P(x)\right)$ の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する行列表現を求めよ。

［解］ $e^x \dfrac{d}{dx}\left(e^{-x}P(x)\right)=e^x\left(-e^{-x}P(x)+e^{-x}P'(x)\right)=-P(x)+P'(x)$ である。（明らかに線形変換である）基底の像を求めると、$1 \mapsto -1,\ x \mapsto 1-x,\ x^2 \mapsto 2x-x^2$ となるから、求める行列表現は $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。　（解終）

注意： 基底 $\{x^2, 1, x\}$ に関する行列表現はどうなるだろうか？ ⇒ 答：$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

例題３： 成分が実数の２次の正方行列全体を $M(2;\mathrm{R})$ と表せば、行列の和と実数との積によりベクトル空間になる。(容易に確認できる。なお次元は４である)このベクトル空間の標準的な基底は以下の４個の行列である。(これを**<u>行列単位</u>**という。単位行列ではない！)

$E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

今、$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき、線形変換 $f: M(2;\mathrm{R}) \to M(2;\mathrm{R})$ を、$f(X)=XA$ と定義する。(明らかに線形変換である)この線形変換の $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ に関する行列表現を求めよ。

［解］ $f(E_{11})=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=aE_{11}+bE_{12},\ f(E_{12})=\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=cE_{11}+dE_{12}$

$f(E_{21})=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}=aE_{21}+bE_{22},\ f(E_{22})=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}=cE_{21}+dE_{22}$ だから、求める行列表現は

$\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {}^tA & O \\ O & {}^tA \end{pmatrix}$ となる。(O は２次の零行列)　（解終）

注意： $M(2;\mathrm{R})$ は R^4 とベクトル空間として同一視できる。$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ つまり、

$E_{11} \mapsto \boldsymbol{e}_1, E_{12} \mapsto \boldsymbol{e}_2, E_{21} \mapsto \boldsymbol{e}_3, E_{22} \mapsto \boldsymbol{e}_4$ （$\boldsymbol{e}_i$ は R^4 の標準基底）

○ 終わりに

ベクトル空間の線形写像とその行列表現について考察してきたが、ここまでの議論でわかるように基底を変えると同じ線形写像でも行列表現は異なる。そこでどのような基底を選んだら行列が簡単になるかという問題が生まれる。何をもって簡単かということもあるが、行列をブロックで考えたとき零行列と単位行列のみで表現できれば「簡単」であるといえるであろう。そこで１つのベクトル空間で２組の基底があったとき、それにより行列表現がどのように変わるかを考察する。これを次のプリントで展開しよう。

基底変換と行列表現

○ はじめに

線形写像の行列表現のおわりにふれたが、ここではベクトル空間の基底の変換（変更）について考察する。あわせて線形写像の行列表現が基底の変換によってどのように変わるかも考えてみる。

○ 基底の変換行列

V を有限次元ベクトル空間とし、$dim\, V = n$ とする。いま、$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を V の１組の基底とする。V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i$ とただ一通りに表せる。このとき、R^n のベクトル

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{a}$ は一意に対応することがわかる。この $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ に関する座標ともいう。

注意： 線形写像 $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i \mapsto \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を V と R^n の（基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ に関する）自然な線形同型写像といい、これにより抽象的なベクトル空間 V と数ベクトル空間 R^n を同一視する。

さて、V のもう１組の基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ を考える。これらも V のベクトルであるから元の基底の線形結合で一意に表せる。それを $\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \boldsymbol{a}_i \ (j = 1, 2, \cdots, n)$ とし、n 次の正方行列

$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$ とすれば、形式的に

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad \cdots \ ①$$

と表せる。この P を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\} \to \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ なる基底の変換行列という。

Claim： P は正則である。

［証明］ V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{b}_i$ とする。(この表現は一意である)

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}$ の旧座標、新座標と呼ぶことにすれば、①から

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

上式右辺が $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ であるから、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \cdots ②$$

$\boxed{\begin{pmatrix} 旧 \\ 座 \\ 標 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} 新 \\ 座 \\ 標 \end{pmatrix}}$ 注意！

が成り立つ。(この等式は重要である) もし P が正則でないならば

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ を満たす $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ が存在する。

即ち、少なくとも 1 つは 0 でない $y_1, y_2, \cdots, y_n$ に対して、$\sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{0}$ が成り立つことになり、これは $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ が V の基底、つまり線形独立であることに矛盾する。　（証終）

注意： $V=\mathrm{R}^n$ のときは慣れないと混乱する。つぎの例を見てみよう。R^3 のベクトルは $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と表すが、これは標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を基底に選んだときの「座標」となる。ところで別の基底として

$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選んだときの座標を $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とすれば、基底の変換行列が

$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ より $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ となるので

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\quad\therefore\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

従って、例えば標準基底で $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ というベクトルの $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ に関する座標は $\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix}$ となる。

例題１：　３次以下の整式全体のベクトル空間 $P(3:\mathrm{R})$ を考える。２組の基底を $\{1,x,x^2,x^3\}$, $\{1,x+a,(x+a)^2,(x+a)^3\}$ とするとき、$\{1,x,x^2,x^3\}$ から $\{1,x+a,(x+a)^2,(x+a)^3\}$ への基底の変換行列を求めよ。

[解]　$1=1$, $x+a=a1+1x$, $(x+a)^2=a^21+2ax+1x^2$,

$(x+a)^3=a^31+3a^2x+3ax^2+1x^3$ より、$P=\begin{pmatrix}1&a&a^2&a^3\\0&1&2a&3a^2\\0&0&1&3a\\0&0&0&1\end{pmatrix}$　（解終）

○ 基底変換と線形写像の行列表現との関係

さて線形写像の行列表現が基底を変えたことによりどのように変わるかを考察する。問題を明確にする。V, W をそれぞれ n 次元、m 次元のベクトル空間とする。

V の２組の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$, $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}$

W の２組の基底 $\{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_m\}$, $\{\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_m\}$

線形写像 $f: V\to W$ の行列表現が

$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$, $\{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_m\}$ に関するものが A

$\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}$, $\{\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_m\}$ に関するものが B

とする。即ち、

$$\left(f(\boldsymbol{a}_1)\ f(\boldsymbol{a}_2)\ \cdots\ f(\boldsymbol{a}_n)\right)=\left(\boldsymbol{c}_1\ \boldsymbol{c}_2\ \cdots\ \boldsymbol{c}_m\right)A\ \cdots ③$$

$$\left(f(\boldsymbol{b}_1)\ f(\boldsymbol{b}_2)\ \cdots\ f(\boldsymbol{b}_n)\right)=\left(\boldsymbol{d}_1\ \boldsymbol{d}_2\ \cdots\ \boldsymbol{d}_m\right)B\ \cdots ④$$

さらに、

$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}\to\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}$ への基底の変換行列を P

$\{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_m\}\to\{\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_m\}$ への基底の変換行列を Q

とする。簡単な考察から

$$\left(f(\boldsymbol{b}_1)\ f(\boldsymbol{b}_2)\ \cdots\ f(\boldsymbol{b}_n)\right)=\left(f(\boldsymbol{a}_1)\ f(\boldsymbol{a}_2)\ \cdots\ f(\boldsymbol{a}_n)\right)P\ \cdots\ (*)$$

$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_m\end{pmatrix}AP$ … ⑤ （ ∵ ③より） 一方、

$\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}_1 & \boldsymbol{d}_2 & \cdots & \boldsymbol{d}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_m\end{pmatrix}Q$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}_1 & \boldsymbol{d}_2 & \cdots & \boldsymbol{d}_m\end{pmatrix}Q^{-1}$ これを⑤に代入すれば

$\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{b}_1) & f(\boldsymbol{b}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{b}_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}_1 & \boldsymbol{d}_2 & \cdots & \boldsymbol{d}_m\end{pmatrix}Q^{-1}AP$ これと④から

$B=Q^{-1}AP$ が導かれる。

補足： $\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{b}_1) & f(\boldsymbol{b}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{b}_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{a}_n)\end{pmatrix}P$ を導こう。

$\boldsymbol{b}_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\boldsymbol{a}_i$ $(j=1,2,\cdots,n)$ なる関係から $P=(p_{ij})$ が求まるので、

$$f(\boldsymbol{b}_j)=f\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\boldsymbol{a}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}f(\boldsymbol{a}_i)=\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{a}_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{1j}\\ p_{2j}\\ \vdots\\ p_{nj}\end{pmatrix}$$

$(j=1,2,\cdots,n)$

$\therefore \begin{pmatrix}f(\boldsymbol{b}_1) & f(\boldsymbol{b}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{b}_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{a}_n)\end{pmatrix}P$ (証終)

まとめると次のようになる。

> V, W をそれぞれ n 次元、m 次元のベクトル空間とし、
> V の２組の基底を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$
> W の２組の基底を $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_m\}$, $\{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_m\}$ とする。
> このとき、線形写像 $f: V\to W$ の行列表現を
> $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}, \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_m\}$ に関するものが A
> $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}, \{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_m\}$ に関するものが B
> とするとき、
> $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}\to\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ への基底の変換行列を P
> $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_m\}\to\{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_m\}$ への基底の変換行列を Q
> とすれば $B=Q^{-1}AP$ が成り立つ。

例題２： R^2 の線形変換 f の標準基底に関する行列表現が $A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ であるとき、基底 $\left\{\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ に関する f の行列表現 B を求めよ。

［解］ $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と表す。標準基底からこの基底への変換行列を P とすれば

$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ となる。 $\therefore\ P^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ B=P^{-1}AP=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ （解終）

注意： $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ は R^2 の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}, \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する f の行列表現である。$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}, \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ に関するものと勘違いしないこと。同様に $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}, \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ に関する f の行列表現が B である。

補足： $B=Q^{-1}AP$ についての定理を、つぎのダイアグラムで覚えるとよい。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}^n \arrow[rrr, "A"] & & & \mathrm{R}^m \\
 & V \arrow[ul, "\phi_1"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\phi_2"] & W \arrow[ur, "\psi_1"] \arrow[dr, "\psi_2"'] & \\
\mathrm{R}^n \arrow[uu, "P"] \arrow[rrr, "B"'] & & & \mathrm{R}^m \arrow[uu, "Q"']
\end{tikzcd} \qquad \Rightarrow \quad B=Q^{-1}AP$$

$$\phi_1\left(\sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{a}_i\right)={}^t(x_1 \ \ x_2 \ \ \cdots \ \ x_n),\ \phi_2\left(\sum_{i=1}^n y_i \boldsymbol{b}_i\right)={}^t(y_1 \ \ y_2 \ \ \cdots \ \ y_n)$$

$${}^t(x_1 \ \ x_2 \ \ \cdots \ \ x_n)=P\,{}^t(y_1 \ \ y_2 \ \ \cdots \ \ y_n)$$

$$\psi_1\left(\sum_{i=1}^m \xi_i \boldsymbol{c}_i\right)={}^t(\xi_1 \ \ \xi_2 \ \ \cdots \ \ \xi_m),\ \psi_2\left(\sum_{i=1}^m \eta_i \boldsymbol{d}_i\right)={}^t(\eta_1 \ \ \eta_2 \ \ \cdots \ \ \eta_m)$$

$${}^t(\xi_1 \ \ \xi_2 \ \ \cdots \ \ \xi_m)=Q\,{}^t(\eta_1 \ \ \eta_2 \ \ \cdots \ \ \eta_m)$$

例題３： 線形写像 $f: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}, \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ に関する行列表現が $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ であるとする。ここで、$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。f の行列表現が $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ になるように R^3, R^2 の基底を求めよ。

［解］ 求める基底をそれぞれ $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}, \{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2\}$ とする。それぞれの基底の変換行列を P, Q とすれば、$P=(\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \boldsymbol{a}_3)^{-1}(\boldsymbol{c}_1 \ \ \boldsymbol{c}_2 \ \ \boldsymbol{c}_3)$, $Q=(\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2)^{-1}(\boldsymbol{d}_1 \ \ \boldsymbol{d}_2)$ だから

$$B=Q^{-1}AP=(\boldsymbol{d}_1 \ \ \boldsymbol{d}_2)^{-1}(\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2)\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \boldsymbol{a}_3)^{-1}(\boldsymbol{c}_1 \ \ \boldsymbol{c}_2 \ \ \boldsymbol{c}_3)$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 & \boldsymbol{d}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 & \boldsymbol{d}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}$$

以前、問題集の 33 ページで考察したように基本変形は、基本行列とよばれる正則な行列との積と同じ。行基本変形は基本行列を左から、列基本変形はそれを右から掛けることに相当する。そこで $\begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 & \boldsymbol{d}_2 \end{pmatrix}^{-1}$, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}$ をいくつかの基本変形をあわせたものと考える。つまり基本変形により $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ を $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に変形したと思えば

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{a} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ここまで行基本変形。さらに続けて

$\xrightarrow{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ これは列基本変形。

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{b} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(対応する基本行列の積を計算してもよい)

$$\therefore \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

以上より、R^3 の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ R^2 の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ （解終）

○ おわりに

「線形写像の行列表現」のプリントで、行列表現を簡単にする基底について考察すると予告し、このプリントの話しになった。例題 3 から容易に推察できるように、V から W への線形写像ならばこの問題は解決済みである。これは V, W の基底を個別に選べるからであり、基本変形がその解決方法である。

一方、V 上の線形変換では問題は簡単でない。$f: V \to V$ において定義域と値域の V が同じ基底を選ぶことになるからである。この線形変換において、固有値、固有ベクトルの概念がでてくる。それは次のプリントと第 4 章§ 2 の話しになってくる。

直交変換の補足

○ 内積と行列の積との関係

n 次元数ベクトル空間 R^n で話をすすめる。R^n の内積は標準内積とする。即ち、

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\text{ のとき、}\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

さて、１行１列の行列を数と同一視する。即ち、$(a)=a$ このとき内積を行列の積で表すことができる。

$$\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}$$

$$\because\ {}^t\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{y} \qquad //$$

これは以後何度も使う重要なことがらである。またこの場合、${}^t\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{x}$ であることは明らかである。

注意： 複素ベクトル空間ではこうはいかないが、ここでは考えないことにする。

○ ある定理

A を n 次の正方行列とし、R^n のベクトルを考える。このときつぎの定理が成り立つ。

> 定理１
>
> A が対称行列ならば、任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ で ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=0$ が成り立つための必十条件は
> $A=O$ である。また、
> A が単に正方行列ならば必十条件は ${}^tA=-A$ 即ち、A が交代行列である。

［証明］ $A=(a_{ij})$ とする。A が対称行列ならば、$a_{ji}=a_{ij}$ が成り立つ。十分であることは明らかである。必要であることを証明する。任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ で ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=0$ が成り立つから、まず $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i$ とすれば、${}^t\boldsymbol{e}_iA\boldsymbol{e}_i=a_{ii}$ だから、$i=1,2,\cdots,n$ で $a_{ii}=0$ つぎに $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j$ $(i<j)$ とすれば

$${}^t(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)=a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}=2a_{ij}=0 \quad (i<j)$$

$$\therefore\ a_{ij}=0 \quad (i<j)$$

A は対称行列だから、$A=O$ が示せた。後半は次のヒントを証明して、それを用いてごらん。

ヒント：$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}{}^t\boldsymbol{x}\left(A+{}^tA\right)\boldsymbol{x}$$ （証終）

○ 直交変換と直交行列

V を有限次元計量実ベクトル空間とする。つまり内積が定義されている実ベクトル空間である。このとき

定義
$f: V \to V$ を線形変換とするとき、f がベクトルの大きさを変えないとき、即ち
$$\| f(\boldsymbol{x}) \| = \| \boldsymbol{x} \| \quad (\boldsymbol{x} \in V)$$
が成り立つとき、f を直交変換という。またこのとき f を表す行列を直交行列という。

注意：「またこのとき f を表す行列を直交行列という。」のところは正確には「正規直交基底による f の表現行列を直交行列という。」となる。ただし、ここではあまり深く追求しないこととする。なお、正規直交基底はあとで定義を述べる。さらにここではベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさを記号で $\| \boldsymbol{x} \|$ と表し、ベクトル $\boldsymbol{x}$ のノルムという。

つぎのことは重要である。

A が直交行列であるための必十条件は、${}^t\!AA = A\,{}^t\!A = E$ が成り立つことである。この等式をもって直交行列の定義とする。

$V = \mathrm{R}^n$ として証明してみる。A を直交変換 f を表す行列とする。ベクトルの大きさは 0 以上の値だから、$\| f(\boldsymbol{x}) \| = \| \boldsymbol{x} \| \quad (\boldsymbol{x} \in V)$ は $\| f(\boldsymbol{x}) \|^2 = \| \boldsymbol{x} \|^2 \quad (\boldsymbol{x} \in V)$ と同値である。

$$\| f(\boldsymbol{x}) \|^2 = A\boldsymbol{x} \bullet A\boldsymbol{x} = {}^t(A\boldsymbol{x})A\boldsymbol{x} = \overline{{}^t\boldsymbol{x}\ {}^t\!AA\boldsymbol{x}} = {}^t\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x} = \overline{{}^t\boldsymbol{x}\,E\boldsymbol{x}}$$

$\therefore {}^t\boldsymbol{x}\,({}^t\!AA - E)\boldsymbol{x} = 0$　${}^t\!AA - E$ は対称行列だから（確認してみよ）前述の定理１から

${}^t\!AA - E = O \quad \therefore {}^t\!AA = E$　従って ${}^t\!A$ は A の逆行列になるので、$A\,{}^t\!A = E$ も成り立つ。　//

A を列ベクトルを用いて、$A = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n)$ と表せば、${}^t\!AA$ は $Gram$ の行列だから

${}^t\!AA = (\boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_j)$　これが単位行列 E に等しいので、$\boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ となる。即ち、A の列ベクトルはすべて単位ベクトルで、異なる列ベクトルは互いに直交する。つまり

$A = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n)$ が直交行列であるための必十条件は各列ベクトルはすべて単位ベクトルで、異なる列ベクトルは互いに直交することである。

補足：$f: V \to V$ を線形変換とするとき、以下は同値

（1）　f は大きさを変えない。つまり、$\| f(\boldsymbol{x}) \| = \| \boldsymbol{x} \| \quad (\boldsymbol{x} \in V)$

（2）　f は内積を変えない。つまり、$f(\boldsymbol{x}) \bullet f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V)$

［証明］（1）⇒（2）一般に、$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \dfrac{1}{4}\left(\| \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \|^2 - \| \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \|^2 \right)$ が成り立つので

$$f(\boldsymbol{x}) \bullet f(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4}\left(\| f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \|^2 - \| f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) \|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\| f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \|^2 - \| f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \|^2 \right) = \frac{1}{4}\left(\| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \|^2 - \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|^2 \right) = \boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y}$$

（2）$\Rightarrow$（1）　$\|f(\boldsymbol{x})\|^2 = f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|^2 \quad \therefore \|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ （証終）

○ 直交系

計量ベクトル空間でも $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が直交する $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ と定義する。さて V を計量ベクトル空間とし、$\boldsymbol{0}$ でないベクトルの組 $N = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が、どの２つのベクトルも直交するとき、即ち

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

が成り立つとき、N を直交系という。さらに N のベクトルがすべて単位ベクトルからなるとき、正規直交系という。

Claim：$N = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が直交系ならば、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は線形独立である。

［証明］ $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ とする。$i = 1, 2, \cdots, r$ に対して

$$(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{a}_r) \cdot \boldsymbol{a}_i = 0 \quad \therefore \alpha_i \|\boldsymbol{a}_i\|^2 = 0 \quad \therefore \alpha_i = 0 \quad \left(\because \|\boldsymbol{a}_i\|^2 \neq 0\right)$$

従って、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は線形独立。 ⊿

V を計量ベクトル空間とする。$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が V の基底でなおかつ正規直交系であるとき、$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を V の正規直交基底という。一般に基底が与えられているとき、そこから正規直交基底をつくる手順がある。これを *Gram−Schmidt* の直交化法という。

Gram−Schmidt の直交化法

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{b}_1 / \|\boldsymbol{b}_1\|$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{b}_2 / \|\boldsymbol{b}_2\|$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{b}_{i+1} = \boldsymbol{a}_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} (\boldsymbol{a}_{i+1} \cdot \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j, \quad \boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{b}_{i+1} / \|\boldsymbol{b}_{i+1}\|$$

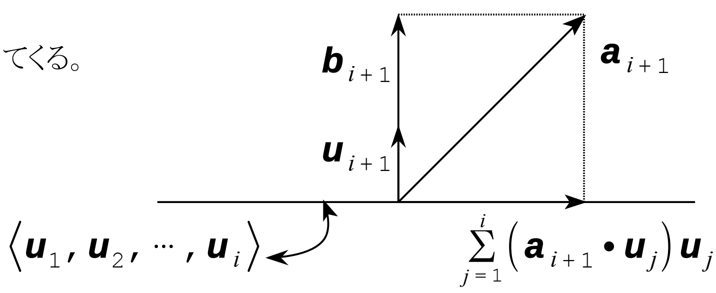
$$\vdots$$

$$\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} (\boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j, \quad \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{b}_n / \|\boldsymbol{b}_n\|$$

とすれば、$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は正規直交基底。また

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle$$ （張る空間は変わらない！）

この手法は第４章§２で例題の中に出てくる。



Gram−Schmidt の直交化法の概念図

線形写像問題

例題１ 線形写像 $f: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ によって $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ であるとき，行列 A を求めよ。

［解答］ $A\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ だから両辺の転置をとれば $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix} {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

これを満たす ${}^tA$ を消去法を用いて解くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 & 2 & 5 \\ 5 & 9 & 8 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & -11 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \therefore\ {}^tA = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 2 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \therefore\ A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix} \qquad //$$

問題１ $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ が n 次元ベクトル空間 V の基底で，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ がベクトル空間 W の任意のベクトルであるとき，$F(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ を満たす線形写像 $F: V \to W$ が，ただひとつだけ存在することを示せ。

例題２ 微分方程式 $y'' + py' + qy = 0$（p, q は定数）の解空間 V の線形変換 $D: y \mapsto y'$ の基底 $\langle y_1, y_2 \rangle$ に関する表現行列を求めよ。ただし，

$y_1(x)$ は初期条件 $y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0$ を満たす解

$y_2(x)$ は初期条件 $y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1$ を満たす解

とする。

［解答］ $(y_1' \quad y_2') = (y_1 \quad y_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ … ① とする。$x = 0$ を代入すれば

$(0 \quad 1) = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \therefore\ a = 0,\ b = 1$

①の両辺を微分すれば $(y_1'' \quad y_2'') = (y_1' \quad y_2')\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 即ち，

$(-py_1' - qy_1 \quad -py_2' - qy_2) = (y_1' \quad y_2')\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ … ② これに $x = 0$ を代入すれば

$(-q \quad -p)=(0 \quad 1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\therefore c=-q, d=-p$，以上より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$ //

○ 補足： 関数の和と定数倍をそれぞれベクトル和，スカラー乗と定義するとある条件を満たす関数全体の集合はベクトル空間になる。例えば，閉区間 $[a, b]$ で連続な関数全体は $C[a, b]$ と表されベクトル空間として扱うときがある。さて，面倒なのですべての実数 x において何回でも微分可能な関数全体の集合もベクトル空間になる。これを $C^{\infty}(\mathrm{R})$ と表せば，

$V=\{y(x) \in C^{\infty}(\mathrm{R}) \mid y''+py'+qy=0\}$ は $C^{\infty}(\mathrm{R})$ の部分空間になる。証明は容易であるがこれを $C^{\infty}(\mathrm{R})$ 上の線形変換 $y \mapsto y''+py'+qy$ を考え，その核とみれば部分空間になることは明白である。この例題は V 上でさらに線形変換 $F: V \to V, y(x) \to y'(x)$ を考えたときの表現行列を求める問題である。ちなみに微分方程式の理論から $dim\, V=2$ となることが知られている。

問題２ $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$ を満たす実数列(すべての項が実数の数列) $\{x_n\}$ 全体の作るベクトル空間を V とする。

$\{a_n\}$ を $a_1=1,\ a_2=0$ なる V の元

$\{b_n\}$ を $b_1=0,\ b_2=1$ なる V の元

とするとき，$\langle\{a_n\},\{b_n\}\rangle$ は V の基底であることを示せ。また，V の線形変換 $F: V \to V$，$\{x_n\} \mapsto \{x_{n+1}\}$ のこの基底による表現行列を求めよ。

例題３ 線形写像 $F: P(3;\mathrm{R}) \to P(2;\mathrm{R}),\ f(x) \to f'(x)$ は同型写像か。

［解答］ $dim\, P(3;\mathrm{R})=4,\ dim\, P(2;\mathrm{R})=3$ だから $P(3;\mathrm{R})$ から $P(2;\mathrm{R})$ への同型写像は存在しない。 //

［別解］ $f(x)=x+1 \to 1,\ g(x)=x-1 \to 1$ 従って単射でないから同型写像でない。 //

○ 補足： 高々 n 次の実数係数多項式全体を $P(n;\mathrm{R})$ と表す。これは $n+1$ 次元ベクトル空間になる。標準的な基底は $\langle 1, x, x^2, \cdots, x^n\rangle$ である。なお，次のことが知られている。

V, W がともに有限次元ならば，V から W への同型写像が存在するための必十条件は
$dim\, V=dim\, W$ が成り立つことである。

さらに次は重要である。

$F: V \to W$ が線形写像であるとき，(V, W はともに有限次元)

F が全射 $\Leftrightarrow$ $rank\, F=dim\, W$

F が単射 $\Leftrightarrow$ $rank\, F=dim\, V$ $\Leftrightarrow$ $dim\, Ker\, F=0$ (次元定理より)

問題３ 表現行列が次の行列 A であるような線形写像 F は，全射・単射・全単射(同型)のいずれかであるか。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

例題４ 次の線形写像 F について，$Im\, F, Ker\, F$ の１組の基底を求めよ。

（1） $F : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$

（2） $F : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} k x_k \right)$

［解答］（1） $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ だから

$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\therefore\ rank\,A = 2$ よって $Im\,F$ の１組の基底は

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$，次に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けば，上記変形の最後の形から $x_1 = -5x_3$, $x_2 = 2x_3$

従って $Ker\,F$ の１組の基底は $\left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

（2） 表現行列は $A = (1 \quad 2 \quad \cdots \quad n)$ だから $rank\,A = 1$，従って $Im\,F$ の１組の基底は $\langle (1) \rangle$

$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$ として $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けば，$x_1 = -\sum_{k=2}^{n} k x_k$ だから，$Ker\,F$ の１組の基底は

$\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ //

問題４ x の実係数多項式全体の作るベクトル空間 $P(\mathrm{R})$ の次のような線形変換を考える。

$D : f(x) \mapsto f'(x) \qquad I : f(x) \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$

（1） $Ker\,D$, $Ker\,I$ は，どんな集合か。

（2） 合成変換 $D \circ I$, $I \circ D$ を求めよ。

例題５ 次の問いに答えよ。

（1） n 次実正方行列全体の作るベクトル空間 $M(n, n; \mathrm{R})$ から R への線形写像 F は，ある n 次正方行列 A によって，$F(X) = tr(AX)$ と書けることを示せ。

（2） 線形写像 $F : M(3, 3; \mathrm{R}) \to \mathrm{R}$ が，

$X = (x_{ij}) \mapsto (x_{23} - x_{32}) + 2(x_{13} - x_{31}) + (x_{12} - x_{21})$ で与えられるとき，$F(X) = tr(AX)$

となる３次正方行列 A を求めよ。

［解答］（1） $M(n, n; \mathrm{R})$ の標準基底は行列単位 E_{ij} である。$F(E_{ij}) \in \mathrm{R}$ だから

$F(E_{ij}) = a_{ji}$ とするとき，$A = (a_{ij})$ とすれば $X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} E_{ij}$ であるとき

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} F(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} a_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{jj} = tr(AX)$$

ただし，b_{jj} は AX の (j, j) 成分。

（2） $F(X) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (j-i) x_{ij}$ だから，$a_{ij} = F(E_{ji}) = i - j$ $\therefore A = (i-j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ //

○ 補足： 以前も書いたが，正方行列 A に対してその対角成分の総和を $tr\,A$ と表し，A のトレースという。次のことが成り立つ。ただし，A, B は正方行列，a は数。

$$tr(A+B) = tr\,A + tr\,B, \quad tr(aA) = a\,tr\,A, \quad tr(AB) = tr(BA)$$

$Rule$： 線形写像は基底の像を求めよ。

問題５ 線形写像 $F: M(n, n; \mathrm{R}) \to \mathrm{R}$ が，$F(X_1X_2) = F(X_2X_1)$ なる性質をもてば，

$F(X) = a\,tr(X)$ （a はある実数）

と書けることを示せ。

例題６ ベクトル空間 $M(2, 2; \mathrm{R})$ において，次の各線形変換の基底 $\langle E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \rangle$ に関する表現行列を求めよ。ただし，$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

（1） $X \mapsto AX$ （2） $X \mapsto XA$ （3） $X \mapsto AX - XA$ （4） $X \mapsto AXA$

（5） $X \mapsto {}^tX$

［解答］（1） $AE_{11} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + cE_{21}$, $AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_{12} + cE_{22}$

$AE_{21} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_{11} + dE_{21}$, $AE_{22} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_{12} + dE_{22}$

以上より表現行列は $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$ (他も同様，解答省略) //

答え：（2） $\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$ （3） $\begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$

（4） $\begin{pmatrix} a^2 & ac & ba & bc \\ ab & ad & b^2 & bd \\ ca & c^2 & da & dc \\ cb & cd & db & d^2 \end{pmatrix}$ （5） $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

○ 補足： $F: V \to W$ が線形写像で $\dim V = n$, $\dim W = m$ であるとき，V, W のそれぞれの基底 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$, $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m \rangle$ に関する F の表現行列 A は

$F(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \boldsymbol{b}_i$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ とするとき，$A = (\alpha_{ij})$

である。これは行列の積を形式的に用いれば，

$$\begin{pmatrix} F(\boldsymbol{a}_1) & F(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & F(\boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

問題６ ２次以下の実係数多項式全体の作るベクトル空間 $P(2;\mathrm{R})$ において，次の線形変換の基底 $\langle 1, x, x^2 \rangle$ に関する表現行列を求めよ。

（1） $E_a: f(x) \mapsto f(x+a)$ （2） $D: f(x) \mapsto f'(x)$

例題７ R^2 の標準基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ に関する表現行列が $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ である線形変換 F はどのような基底をとれば表現行列が対角行列になるか。基底とそのときの対角行列を求めよ。

［解答］ 求める基底を $\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \rangle$ とする。これは基底の変換行列でもあるので $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ $\therefore$ $AP = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ $\therefore$ $A\boldsymbol{p}_i = \alpha_i \boldsymbol{p}_i$ $(i = 1, 2)$

$(A - \alpha_i E)\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0}$ $(i = 1, 2)$，$\boldsymbol{p}_i \neq \boldsymbol{0}$ だから $|A - \lambda E| = 0$ を満たす λ が α_1, α_2 である。

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ $\therefore$ $\lambda = 2, 5$

$\lambda = 2$ のときの１つの解は，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\lambda = 5$ のときの１つの解は，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるから基底として

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ をとれば表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ となる。 //

○ 補足： 有限次元ベクトル空間 V の次元を n とする。V の基底を $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ から

$B=\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ に変えるとき，記号的に

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}$$ ，即ち $\boldsymbol{b}_j=\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{a}_i$

となるとき，$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}$ を A から B への基底変換の行列という。このとき

$\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_i=\sum_{i=1}^{n} y_i\boldsymbol{b}_i$ ならば，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ が成り立つ。$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ をそれぞれベクトル $\boldsymbol{v}$ の旧座標，新座標ということがある。また明らかに P は正則になる。

問題７ 線形写像 $F: \mathrm{R}^3\to \mathrm{R}^2$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$，$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ に関する表現行列が $A=\begin{pmatrix}1 & -5 & -2\\ -1 & 8 & 3\end{pmatrix}$ であるとき，その表現行列が $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ になるように R^3 および R^2 の基底を定めよ。

例題８ １変数の実数値関数全体の作るベクトル空間 R^{R} の部分空間 $L[\cos x, \sin x]$
即ち，$L[\cos x, \sin x]=\{\alpha\cos x+\beta\sin x \mid \alpha, \beta\in \mathrm{R}\}$ に２つの基底 $\mathrm{A}_0=\{\cos x, \sin x\}$，$\mathrm{A}_\theta=\{\cos(x-\theta), \sin(x-\theta)\}$ を考える。A_0 から A_θ への基底変換の行列 P を求めよ。

［解答］ $P=(p_{ij})$ とすれば，$\cos(x-\theta)=\cos\theta\cos x+\sin\theta\sin x$
$\therefore p_{11}=\cos\theta, p_{21}=\sin\theta$，$\sin(x-\theta)=\cos\theta\sin x-\sin\theta\cos x$
$\therefore p_{12}=-\sin\theta, p_{22}=\cos\theta$，以上より $P=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ //

問題８ ３次以下の実係数多項式全体の作るベクトル空間 $P(3;\mathrm{R})$ に２つの基底 $\mathrm{B}_0=\{1, x, x^2, x^3\}$，$\mathrm{B}_a=\{1, x+a, (x+a)^2, (x+a)^3\}$ を考える。このとき，B_0 から B_a への基底変換の行列 P を求めよ。

例題９ $A^2=A$ なる n 次正方行列 A について，

$W_1 = \{ \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \}$，$W_2 = \{ \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \}$

とおき，$r = rank\,A$ とするとき，

（1） $W_1 \oplus W_2 = \mathrm{R}^n$ を示せ。

（2） $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ となる n 次正方行列 P が存在することを示せ。

［解答］（1） R^n の標準基底に関する表現行列が A である線形変換を F とする。明らかに $W_2 = Ker\,F$ である。また，$\boldsymbol{x} \in W_1 \Rightarrow \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ だから $W_1 \subset Im\,F$，また $\boldsymbol{x} \in Im\,F \Rightarrow$ $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^n$ が存在するが，A の仮定から $A\boldsymbol{x} = A^2\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ が成り立つので $Im\,F \subset W_1$ $\therefore W_1 = Im\,F$ となる。$dim\,W_1 = dim\,Im\,F = rank\,A = r$ だから次元定理より $dim\,W_2 = n - r$，さらに $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ $\therefore W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$

以上より $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ であり，$dim(W_1 \oplus W_2) = dim\,W_1 + dim\,W_2 = r + n - r = n$

$\therefore W_1 \oplus W_2 = \mathrm{R}^n$

（2） W_1，W_2 の１組の基底をそれぞれ $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_r\}$，$\{\boldsymbol{q}_{r+1}, \boldsymbol{q}_{r+2}, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ すれば（1）で示されたことから $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{q}_{r+1}, \boldsymbol{q}_{r+2}, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ は R^n の基底となる。

$\boldsymbol{p}_i \in W_1$，$\boldsymbol{q}_j \in W_2$ $(i = 1, 2, \cdots, r\,;\, j = r+1, r+2, \cdots, n)$ だから $A\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_i$，$A\boldsymbol{q}_j = \boldsymbol{0}$

従って $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_r & \boldsymbol{q}_{r+1} & \boldsymbol{q}_{r+2} & \cdots & \boldsymbol{q}_n \end{pmatrix}$ とおけば P は正則で

$$AP = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_r & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_r & \boldsymbol{q}_{r+1} & \boldsymbol{q}_{r+2} & \cdots & \boldsymbol{q}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad \therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \qquad //$$

問題９ $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，

（1） $A^2 = A$ を確かめよ。

（2） $P^{-1}AP$ が A の標準形（例題９（2）のような行列）になるような４次正方行列 P を１つ求めよ。

例題１０ $\boxed{\text{収束する}}$ 実数列全体の作るベクトル空間上の次の写像は線形であることを示せ。

（1） $P : \{a_n\} \mapsto \{a_{2n+1}\}$ （2） $\varDelta : \{a_n\} \mapsto \{a_{n+1} - a_n\}$ （3） $L : \{a_n\} \mapsto \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

［解答］（1） k, l を任意の実数とすれば，

$P(k\{a_n\} + l\{b_n\}) = P(\{ka_n + lb_n\}) = \{ka_{2n+1} + lb_{2n+1}\} = k\{a_{2n+1}\} + l\{b_{2n+1}\}$

$= kP(\{a_n\}) + lP(\{b_n\})$，従って P は線形である。（他も同様，解答省略） //

○ 補足： 実数列全体の集合を R^{N} と表す。$\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}}$ に対して $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$

$k\{a_n\}=\{ka_n\}$ とすれば，R^{N} は実ベクトル空間になる。収束する実数列全体の作るベクトル空間は R^{N} の部分空間である。(1)，(2) は収束する実数列全体の作るベクトル空間上の線形変換であり，(3) は R への線形写像である。

問題10 次の写像 $F:\ \mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^3$ は線形写像か。

(1) $F:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1x_2\\0\end{pmatrix}$　　(2) $F:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3x_1+x_2\\4x_1\\x_1-2x_2\end{pmatrix}$

問題11 R^2 の線形変換 $F:\ \boldsymbol{x}\mapsto\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ に関する表現行列を求めよ。

○ 補足： R^n の線形変換 $F:\ \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ に関する表現行列は $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\cdots&\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP$ である。一般のベクトル空間ではこのような計算はできないので注意する。

問題12 次の問いに答えよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}1&-2&0&2\\0&1&-1&-3\\3&-1&-5&-9\end{pmatrix}$ の標準形を N とするとき，$N=Q^{-1}AP$ となる正則行列 P，Q を求めよ。

(2) この結果を用いて，$\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ なる R^4 から R^3 への線形写像を F とするとき，次のような R^4 の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\}$ を求めよ。

$\{F(\boldsymbol{a}_1),F(\boldsymbol{a}_2)\}:\ Im\,F$ の基底，$\{a_3,a_4\}:\ Ker\,F$ の基底

○ 補足： 次のことは重要，N は A の標準形。

$F:\ \mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^m$，$F(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$，$Q^{-1}AP=N$，$r=rank\,A$ なる正則行列

$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\cdots&\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1&\boldsymbol{b}_2&\cdots&\boldsymbol{b}_m\end{pmatrix}$ をとれば，

$$F(\boldsymbol{a}_i)=\begin{cases}\boldsymbol{b}_i & (i=1,2,\cdots,r)\\ \boldsymbol{0} & (i=r+1,r+2,\cdots,n)\end{cases}$$

$\{F(\boldsymbol{a}_1),F(\boldsymbol{a}_2),\cdots,F(\boldsymbol{a}_r)\}:\ Im\,F$ の基底

$\{\boldsymbol{a}_{r+1},\boldsymbol{a}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{a}_n\}:\ Ker\,F$ の基底