# 2015年度学年末試験問題・数学B（E2）

１．次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (30点)

（1） $\begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ -1 & b & c \\ d & 3 & 0 \end{pmatrix}$ が交代行列となるように $a$ , $b$ , $c$ , $d$ の値を求めよ。

(すべて正解で2点)

（2） $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。( 数と行列の積の形で答えてはだめ)

（3） $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ , $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，$AX=B$ を満たす行列 $X$ は［ 1 ］であり，

$YB=A$ を満たす行列 $Y$ は［ 2 ］である。( 数と行列の積の形で答えてはだめ)

（4） 行列 $A$ , $B$ が上の（3）と同じものであるとき，$AB=$［ 1 ］, $B^{-1}A^{-1}=$［ 2 ］となる。

( 数と行列の積の形で答えてはだめ)

（5） $\begin{pmatrix} 2a+2b & 4b \\ 2 & 2c+6d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3b+3 & a+2 \\ c+d & -3d-3 \end{pmatrix}$ を満たす $a$ , $b$ , $c$ , $d$ の値を求めよ。

(1点ずつ，計4点)

（6） $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ , $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ , $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$2(A+B)-3(A-B+C)$

を求めよ。

（7） 行列 $A$ , $B$ が上の（6）と同じものであるとき，$2X-A=3B-X$ を満たす $X$ を求めよ。

( 数と行列の積の形で答えてはだめ)

（8） 次の行列の積を求めよ。

［1］ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$　　［2］ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

［3］ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

（9） $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ , $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，次を計算せよ。

［1］ ${}^tA+{}^tB$　　［2］ ${}^tA\,{}^tB$

２．行列 $A$ , $B$ が同じ次数の正方行列で $B$ は正則とする。このとき，次の文章の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (10点)

$\left(B^{-1}AB\right)^2=$（ 1 ）$A^2$（ 2 ）となる。また任意の自然数 $n$ に対して

$\left(B^{-1}AB\right)^n=$（ 3 ）$A^n$（ 4 ） … ① となる。いま，$A=\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ , $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば

$B^{-1}AB=$ ( 5 )　$\therefore\left(B^{-1}AB\right)^n=$ (( 5 )) $^n=$ ( 6 ) この結果と①の等式を用いれば
$A^n=$ ( 7 ) となる。

3．$A=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ とするとき，$AX+B=C$ を満たす行列 $X$ を求めよ。(3点)

4．$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とするとき，次の各問いに答えよ。(7点)

（1） $B^2$ を求めよ。ただし，答のみ。　　（2） $(E+B)^2$ を求めよ。ただし，答のみ。

（3） $n$ が自然数のとき，$A^n$ を求めよ。

5．$A, B$ を２次の正方行列とする。次のことについて真であれば証明し，偽であれば反例をあげよ。(5点)

（1） $AB=O$ （$O$：零行列）ならば，$A, B$ の少なくとも一方は $O$ である。

（2） $A^2+2A+E=O$ （$E$：単位行列）ならば，$A$ は正則である。

6．$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ のとき，$AX=B$ … ① を満たす行列 $X$ を求める次の計算の (　) に入る行列を求めよ。ただし，答のみ。(25点)

①の両辺に左から $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ を掛けると ( 1 ) $X=$ ( 2 ) … ② となる。②の両辺に左から $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -5 & 0 & 1\end{pmatrix}$ を掛けると ( 3 ) $X=$ ( 4 ) … ③ となる。③の両辺に左から $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ を掛けると ( 5 ) $X=$ ( 6 ) … ④ となる。④の両辺に左から $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix}$ を掛けると

( 7 ) $X=$ ( 8 ) … ⑤ となる。⑤の両辺に左から $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ を掛けると

( 9 ) $X=$ ( 10 ) … ⑥ となる。最後に⑥の両辺に左から $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1/2\end{pmatrix}$ を掛けると

( 11 ) $X=$ ( 12 )　$\therefore X=$ ( 13 )

7．次の各問いに答えよ。(19点)

（1） 正方行列 $A$ が対称行列かつ交代行列ならば，$A$ は零行列であることを証明する次の文章の

［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

$A$ は対称行列だから ${}^tA=$［ 1 ］，また交代行列でもあるので ${}^tA=$［ 2 ］となる。つまり

［ 1 ］=［ 2 ］となるから［ 3 ］$=O$ $\therefore A=O$

（2） $B_1, B_2, C_1, C_2$ は同じ次数の正方行列で $B_1, B_2$ は対称行列，$C_1, C_2$ は交代行列とする。このとき，$B_1+C_1=B_2+C_2$ ならば $B_1=B_2,\ C_1=C_2$ が成り立つことを証明せよ。

（3） $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ を対称行列と交代行列の和として表せ。

8．$A=\left(a_{ij}\right)$ が $n$ 次の正方行列のとき，その対角成分の総和を記号で $tr\,A$ と表す。即ち，

$tr\,A=\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ である。$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ のとき，次の各問いに答えよ。

ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (6点)

（1） $tr\,A$ の値を求めよ。　（2） $tr\,B$ の値を求めよ。　（3） $tr\,(AB)$ の値を求めよ。

（4） $tr\left({}^tAB\right)$ の値を求めよ。