2015年度後期中間試験問題・数学B(E2)

１．次の問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (25点)

(1) $\vec{a}=(1,3,-2)$, $\vec{b}=(2,-1,3)$ の両方のベクトルに直交する $\boxed{\text{単位ベクトル}}$ を求めよ。

(2) ４点 $A(1,-1,2)$, $B(-4,3,-1)$, $C(2,1,-1)$, $D(7,-3,2)$ があるとき，

[1] $\overrightarrow{AB}$ の成分表示を求めよ。　[2] $\overrightarrow{CD}$ の成分表示を求めよ。

(3) 次の文章の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

四面体 OABC と $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ で定まる点 G について，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とすれば $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OB}=$[1] $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right.$ を用いて表す$\left.\right)$ となる。また，直線 BG と三角形 OCA の交点を R とすれば，$\overrightarrow{BR}=t\,\overrightarrow{BG}$ となる t が存在するから

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BR}=$[2]$\vec{a}+($[3]$)\vec{b}+$[4]$\vec{c}$ … ①　([2]~[4] は t の式)

また R は平面 OCA 上の点だから $\overrightarrow{OR}=s\,\vec{a}+r\,\vec{c}$ … ② と表せる。$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線形独立だから①，②より $t=$[5] となるから，これより $\overrightarrow{OR}=$[6] $\left(\vec{a},\vec{c}\right.$ を用いて表す$\left.\right)$

(4) $\vec{a}=(1,-1,1)$, $\vec{b}=(-2,1,0)$ のとき，$\left|2\vec{a}+3\vec{b}\right|$ を求めよ。

(5) ２点 $A(1,-4,-3)$, $B(-4,6,2)$ を結ぶ線分 AB を 3:2 に内分する点の座標を求めよ。

(6) ２平面 $(k-1)x-2y+z=1$, $x-3y+kz=3$ が垂直になるように定数 k の値を定めよ。

(7) $\vec{a}=(4,-5,6)$, $\vec{b}=(-1,0,1)$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(8) 方程式 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-3=0$ で表される球の

[1] 中心の座標を求めよ。　[2] 半径を求めよ。

(9) ２平面 $2x+3y+6z+3=0$, $4x-y-9z=2$ のなす角 $\left(0 \text{以上} \dfrac{\pi}{2} \text{以下，} \boxed{\text{弧度法}}\right)$ を求めよ。

(10) ２直線 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{6}$, $\dfrac{1-x}{4}=\dfrac{y+1}{k}=\dfrac{z+2}{5}$ が垂直になるように定数 k の値を定めよ。

(11) 点 $(1,-2,-3)$ と平面 $3x-2y+z=-7$ との距離を求めよ。

(12) 点 $(1,-1,-1)$ を通り，平面 $-x+2y-3z=2$ に平行な平面の方程式を求めよ。

２．空間内の次の平面の単位法線ベクトルの成分表示を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (4点)

(1) $x=0$　(2) $y=2$　(3) $z=x$　(4) $2x-3y+6z+12=0$

３．直線 $x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ と平面 $x+2y+3z=5$ の交点の座標を求めよ。(5点)

４．３点 $P(-1,3,1)$, $Q(2,1,3)$, $R(5,-4,2)$ があり，点 P と Q を通る直線を l とすると

き，次の問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{(1)，(3)，(4) は答のみ。}}$ (16点)

（1） l の方程式を求めよ。

（2） Rと l の距離(Rから l に下ろした垂線の足とRとの距離)を求めよ。

（3） l に関してRと対称な点 R′ の座標を求めよ。

（4） RとR′を直径の両端とする球の方程式 $\boxed{\text{(標準形)}}$ を求めよ。

（5） RとR′を通る球の中心の軌跡の方程式を求めよ。

5．直線 l_1 : $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=z+5$ と直交し (共有点をもつ)，原点を通る直線を l_2 とするとき，次の問いに答えよ。(11点)

（1） l_2 の方程式を求めよ。

（2） 2直線 l_1，l_2 を含む平面の方程式を求めよ。

6．球 $x^2+y^2+z^2-2x-2y=11$ と平面 $2x+y+2z=12$ について，次の問いに答えよ。

ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (6点)

（1） この球の［1］ 中心の座標と［2］ 半径を求めよ。

（2） この球の中心を通り，平面に垂直な直線の方程式を求めよ。

（3） （2）で求めた直線と平面との交点Hの座標を求めよ。

（4） 球と平面が交わってできる図形は円になる。この円の半径の値を求めよ。

7．2直線 l : $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=3t+2 \\ z=at+1 \end{cases}$，$m$: $\begin{cases} x=2s-1 \\ y=s+6 \\ z=5s-9 \end{cases}$ (t，s は媒介変数) について，次の問いに答えよ。

ただし，a は定数とする。(17点)

（1） l と m は交わる (共有点をもつ) かどうか調べた次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

l，m の方程式を連立させると $\begin{cases} s-t=2 & \cdots ① \\ s-3t=-4 & \cdots ② \\ [\ 1\ ]=10 & \cdots ③ \end{cases}$ という方程式が出てくる。

②－①，③－5×①を計算すると，$\begin{cases} s-t=2 & \cdots ① \\ -2t=-6 & \cdots ④ \\ [\ 2\ ]=0 & \cdots ⑤ \end{cases}$ となる。①，④から $s=[\ 3\ ]$，$t=3$ となる。$a\neq[\ 4\ ]$ のとき，⑤から $t=0$ となり矛盾する。従ってこのとき共有点はない。$a=[\ 4\ ]$ のとき，共有点が存在し，その座標は［ 5 ］となる。

$\boxed{\text{以下，} l\text{，} m \text{ は交わらない場合を考える。}}$

（2） 直線 m を含み，直線 l と平行な平面 α の方程式を求めよ。直線と平面が交わらないことを平

行という。

(3) l と m の距離（l 上と m 上の２点の距離の最小値）を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

8． $\vec{a}=(x,1,1)$，$\vec{b}=(1,x,1)$，$\vec{c}=(1,1,x)$ について，次の問いに答えよ。

次の文章の［　］，＜　＞に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (18点)

注意：＜　＞には数学用語が入る。またこの＜　＞は無解答なら０点であるが，誤答は -2 点とする。

(1) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が線形独立か従属か調べる。k,l,m をスカラーとして１次関係式 $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=\vec{0}$ を考える。これをベクトルの成分で表せば次の連立１次方程式が導かれる。

$$\begin{cases} k+l+xm=0 & \cdots ① \\ k+xl+m=0 & \cdots ② \\ [\ 1\ ]=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

，②－①，③－x×① を計算すると

$$\begin{cases} k+l+xm=0 & \cdots ① \\ (x-1)l+[\ 2\ ]=0 & \cdots ②' \\ (1-x)l+[\ 3\ ]=0 & \cdots ③' \end{cases}$$

となる。$x=1$ のとき，$\vec{a}=\vec{b}=[\ 4\ ]$ だから $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は＜ 5 ＞

$x\neq 1$ のとき，
$$\begin{cases} k+l+xm=0 & \cdots ① \\ l+[\ 6\ ]=0 & \cdots ②'' \\ l+[\ 7\ ]=0 & \cdots ③'' \end{cases}$$
となる。③－② を計算すると
$$\begin{cases} k+l+xm=0 & \cdots ① \\ l+[\ 6\ ]=0 & \cdots ②'' \\ [\ 8\ ]=0 & \cdots ③''' \end{cases}$$

∴ $x\neq[\ 9\ ]$ のとき，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は＜ 10 ＞となる。$x=[\ 9\ ]$ のとき，$\vec{c}=[\ 11\ ]$ となるので $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は＜ 12 ＞となる。（［ 4 ］，［ 11 ］はベクトルを用いたもので，成分表示ではない）

$\boxed{\text{以下，} \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ が線形独立の場合を考える。}}$

(2) $\vec{d}=(1,-1,2)$ とするとき，$k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=\vec{d}$ を満たす k,l,m を x の式で表せば，
$k=[\ 1\ ]$，$l=[\ 2\ ]$，$m=[\ 3\ ]$ となる。