2015年度前期末試験問題・数学B(E2)

１．次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (25点)

(1)　点 (1, 2) を通り，方向ベクトルが (2, −1) である直線の媒介変数 t による方程式を求めよ。

(2)　直線 $-x+2y+2=0$ について，

　[1]　法線ベクトルを１つ求めよ。　　[2]　点 (−1, 1) との距離を求めよ。

(3)　$\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(1,2)$ のとき，$\vec{c}=(-1,3)$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ の線形結合で表せ。

(4)　$\vec{a}$, $\vec{b}$ が線形独立であるとき，等式 $2\vec{a}+x\vec{a}-3\vec{b}=y\vec{a}-(2-x)\vec{b}$ が成り立つように，実数 x, y の値を求めよ。

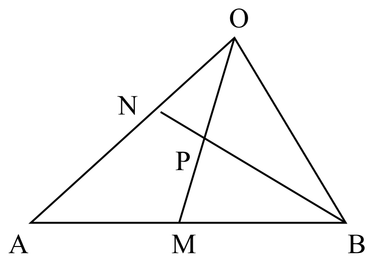
(5)　三角形 OAB において，AB の中点を M，OA を 1:2 に内分点を N とし，OM と BN の交点を P とする。次の文章の [　] に入る最も適切な答えをかけ。

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とすれば，$\overrightarrow{ON}=[\ 1\ ]\vec{a}$, $\overrightarrow{OM}=[\ 2\ ](\vec{a}+\vec{b})$ となる。

OP : PM $=m:(1-m)$　$(0<m<1)$ とすれば，$\overrightarrow{OP}=[\ 3\ ](\vec{a}+\vec{b})$ となるので

$\overrightarrow{NP}=[\ 4\ ]\vec{a}+[\ 5\ ]\vec{b}$ となる。また，$\overrightarrow{NB}=[\ 6\ ]\vec{a}+[\ 7\ ]\vec{b}$ であり，$\overrightarrow{NP}\,/\!/\,\overrightarrow{NB}$ だから

m の値は [8] となる。従って，OP : PM = [9] : [10] (最も簡単な整数比)



(6)　２つの点 A(2, 5), B(7, −3) を通る直線の媒介変数 t による方程式を求めよ。

(7)　AB=AC の二等辺三角形 ABC において，辺 BC の中点を M とする。次の文章の [　] に入る最も適切な答えをかけ。

$\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ とすれば，$\overrightarrow{AM}=[\ 1\ ](\vec{b}+\vec{c})$,

$\overrightarrow{BC}=[\ 2\ ]\vec{b}+[\ 3\ ]\vec{c}$ であるから，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=[\ 4\ ]\left|\vec{b}\right|^2+[\ 5\ ]+[\ 6\ ](\vec{b}\cdot\vec{c})$

また条件から $\left|\vec{b}\right|^2=[\ 7\ ]$ であるから，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=[\ 8\ ]$

２．次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (25点)

(1)　A(1, 2), B(−2, −3), C(−1, 4) のとき，三角形 ABC の重心 G の座標を求めよ。

(2)　A(−3, 5), B(4, −9) のとき，線分 AB を 4:3 に内分する点を P，線分 AB を 3:4 に内分する点を Q とするとき，

　[1]　P の座標を求めよ。

　[2]　$\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の線形結合で表せ。(成分表示でない)

(3)　O(0, 0), A(9, −2), P(k, 2) であるとき，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AP}$ となるように定数 k の値を定めよ。

(4)　ベクトル $\vec{a}=(2,-1)$ と $\vec{b}=(k-1,k)$ が垂直となるように定数 k の値を定めよ。

(5)　$\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|$ の値を求めよ。

(6)　A(2, 3), B(6, −7), C(−1, k), D(k, 2) のとき，$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{CD}$ となるように定数 k の値を定めよ。

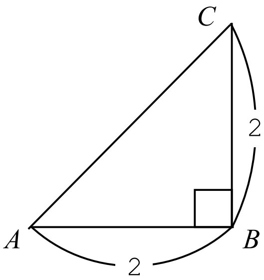
(7)　平行四辺形 ABCD において，AB$=1$，AD$=3$，$\angle$BAD$=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，辺 BD の長さを求めよ。

(8)　次の２つのベクトルのなす角 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \pi\right)$ を求めよ。

［1］　$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ -3)$　　［2］　$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(4,\ 2)$

(9)　図の直角二等辺三角形 ABC において，次の内積を求めよ。

［1］　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　［2］　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　［3］　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$



(10)　３つの点 A$(-1,\ 0)$，B$(2,\ -1)$，C$(x,\ y)$ と実数 k について

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=20$ が成り立つとき

［1］　k の値を求めよ。　　［2］　点 C の座標を求めよ。

(11)　$\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ のとき，$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 上への正射影 $\vec{h}$ の成分表示を求めよ。

３．２つの異なる定点 A，B に対して，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$ … ①

を満たす点 P に関する次の考察の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお，O は原点である。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (12点)

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2=\left|\vec{p}-\vec{a}\right|^2=(\ 1\ )+\left|\vec{a}\right|^2-2((\ 2\ ))$ … ②

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2=\left|\vec{p}-\vec{b}\right|^2=(\ 3\ )+\left|\vec{b}\right|^2-2((\ 4\ ))$ … ③

②＋③

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2=(\ 1\ )+\left|\vec{a}\right|^2-2((\ 2\ ))+(\ 3\ )+\left|\vec{b}\right|^2-2((\ 4\ ))$

$=(\ 5\ )-2(\ 6\ )+\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2$，ここで条件①を用いると $(\ 7\ )-(\ 6\ )=(\ 8\ )$ となる。

$(\ 7\ )-(\ 6\ )=(\ 8\ )$ の両辺に $\dfrac{1}{4}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2$ を加えて変形すると

$|(\ 9\ )|^2=\dfrac{1}{4}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2$　従って，点 P は中心の位置ベクトルが（ 10 ），半径が（ 11 ）の円周上にある。

４．次の文章の（　）に入る最も適切な答えを下の選択肢から選び，その $\boxed{\text{符号}}$ を解答用紙にかけ。なお，この問題は $\boxed{\text{無解答なら０点であるが，誤答なら－３点とする。}}$ (10点)

１個のベクトル $\vec{a}$ が線形独立であるための条件は（ 1 ）である。２個のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が線形独立であるための条件は（ 2 ）である。一般に n 個のベクトル $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$ が線形独立であるとはこれらの１次関係式（ 3 ）が（ 4 ）以外の解を持たないことである。ベクトル $\vec{a}$ と，その逆ベクトル $-\vec{a}$ は（ 5 ）である。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が線形独立ならば $\vec{a}$ と $\vec{a}+\vec{b}$ は（ 6 ）である。$\vec{a}\perp\vec{b}$ かつ

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ ならば，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（ ７ ）である。なぜならば $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$ を満たす数 m, n を求めると，この等式の両辺とベクトル $\vec{a}$ との内積を計算すれば（ ８ ）$\left(\because\ \vec{a}\bullet\vec{b}=0\right)$となり，（ ９ ）だから $m=0$ となる。今度は等式の両辺と $\vec{b}$ との内積を計算すれば，同様な理由で（ １０ ）となり $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（ ７ ）であることが示せた。

以下選択肢

あ：$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\vec{a}_k=\vec{0}$　い：$\sum_{k=1}^{n}\vec{a}_k=\vec{0}$　う：線形従属　え：線形独立　お：$\vec{a}=\vec{0}$

か：$\vec{a}\neq\vec{0}$　き：$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$　く：$\vec{a}_1=\vec{a}_2=\cdots=\vec{a}_n=\vec{0}$　け：$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

こ：$\vec{a}\bullet\vec{b}=0$　さ：$n=0$　し：$n\neq0$　す：$n=\vec{0}$　せ：$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないこと

そ：$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直でないこと　た：$m\left|\vec{a}\right|^2=0$　ち：$m\left(\vec{a}\right)^2=0$　つ：$m\left|\vec{a}\right|^2=\vec{0}$

て：$\left|\vec{a}\right|^2=0$　と：$\left|\vec{a}\right|^2\neq\vec{0}$　な：$\left|\vec{a}\right|^2\neq0$

５．$\vec{a}=(1,-1)$, $\vec{b}=(-2,1)$ のとき，$\left(\vec{b}-m\vec{a}\right)\perp\vec{a}$ となるように実数 m の値を求めよ。また，このとき $\vec{b}-m\vec{a}$ の成分表示を求めよ。(3点)

６．$\vec{a}=\left(a_1, a_2\right)$, $\vec{b}=\left(b_1, b_2\right)$ のとき，$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)^2\geqq0$ が成り立つことを証明せよ。また，等号成立のための必要十分条件も求めよ。ただし，$\vec{a}\bullet\vec{b}$ はベクトルの成分を用いた定義式を使って証明すること。２つのベクトルのなす角を使った証明には点を与えない。(8点)

７．$\vec{a}=(-3, 2)$ のとき，次の各問いに答えよ。ただし，（１）と（４）は答のみ。(17点)

（１）$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{u}_1$ とするとき，$\vec{u}_1$ の成分表示を求めよ。

（２）$\vec{a}$ と垂直な単位ベクトルで，その x 成分が正 となるものを $\vec{u}_2$ とするとき，$\vec{u}_2$ の成分表示を求めよ。

（３）$\vec{e}_1=(1, 0)$ とするとき，$\vec{e}_1$ を $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ の線形結合で表せ。

（４）$\vec{e}_2=(0, 1)$ とするとき，$\vec{e}_2$ を $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ の線形結合で表せ。