# 2013年度学年末試験問題・数学B（D2）

１． 次の問いに答えよ。ただし、答のみ。

(1) $\begin{pmatrix} 2x-1 & 1 \\ w+4 & 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -y+1 \\ w-1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -w & z+1 \end{pmatrix}$ を満たす $x, y, z, w$ の値を求めよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ のとき、$AX = B$ を満たす行列 $X$ を求めよ。

(3) $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ を計算せよ。

(4) ${}^t\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ を計算せよ。

(5) ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ を計算せよ。

(6) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき、$A^{-1}B^{-1}$ を求めよ。

(7) 上の (6) の $A, B$ について、$(AB)^{-1}$ を求めよ。

(8) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を計算せよ。

(9) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 37 \end{pmatrix}$ を満たす行列 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ。注意：$x, y$ は整数。

(10) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、$A^2$ を求めよ。

(11) 複素行列 $A = \begin{pmatrix} 3+4i & 5+6i \\ 7+8i & 9 \\ -i & 2-3i \end{pmatrix}$ に対して、$A$ の随伴行列 $A^*$ を求めよ。

２． 正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、対角成分の総和を $tr\,A$ と表し、$A$ のトレースまたは跡という。

$tr\,A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ （$n$ は $A$ の次数）

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ がともに $n$ 次の正方行列のとき、以下の問いに答えよ。

(1) 次の論理は $tr\,(AB) = tr\,(BA)$ を証明したものである。かっこに入るもっとも適切な答を解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

$AB$ の $(i, j)$ 成分は、$\sum_{k=1}^{n}$ [ 1 ] である。従って、$tr\,(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} [\ 2\ ] \right)$ … ①

となる。一方 $BA$ の $(i, j)$ 成分は、$\sum_{k=1}^{n}$ [ 3 ] である。従って、$tr\,(BA) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} [\ 4\ ] \right)$ … ②

となる。②式で文字 $i$ と $k$ を交換すると、$tr\,(BA)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}[\ 5\ ]\right)$, 明らかに

$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}*\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}*\right)$ だから、$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}[\ 5\ ]\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}[\ 6\ ]\right)$ … ③

$b_{ki}a_{ik}=a_{ik}b_{ki}$ だから、③と①は等しい。 $\therefore\ tr\,(AB)=tr\,(BA)$ が示された。

（2） $P$ が正則ならば、$tr\left(P^{-1}AP\right)=tr\,A$ が成り立つことを上の（1）で証明されたことを用いて示せ。成分を用いた証明には点を与えない。（証明されたことを用いて示せるなら、そうすべき）

3． $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間 $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\ x+y+2z=0\right\}$ について、次の問いに答えよ。なお、$W$ が部分空間であることは証明しなくてよい。また、$\boldsymbol{R}^3$ の内積は標準内積とする。

（1） $dim\ W$ および $W$ の１組の基底を求めよ。

（2） $W$ の直交補空間 $W^{\perp}$ の次元および１組の基底を求めよ。

（3） $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ の $W$ への正射影を求めよ。

4． $\alpha=a_1+a_2\sqrt{2}$ $\left(a_1, a_2\text{ は有理数}\right)$ に対して、行列 $A(\alpha)=\begin{pmatrix}a_1 & 2a_2\\a_2 & a_1\end{pmatrix}$ とおくとき、次のことを証明せよ。

（1） $A(\alpha+\beta)=A(\alpha)+A(\beta)$

（2） $A(\alpha\beta)=A(\alpha)A(\beta)$

5． $A=\begin{pmatrix}a & 1-a\\0 & 1\end{pmatrix}$ $(0<a<1)$ について、次の問いに答えよ。ただし、$E$ は２次の単位行列。

（1） $A^{-1}$ を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（2） $A^2-(a+1)A+aE$ を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。 $\to$ $\begin{pmatrix}* & *\\* & *\end{pmatrix}$ という形で答えよ。

（3） $x$ の整式 $x^n$ を $x^2-(a+1)x+a$ で割った余りを $a_n x+b_n$ とするとき、$a_n$, $b_n$ を求めよ。ただし、$n$ は自然数とする。

（4） $A^n=\left\{A^2-(a+1)A+aE\right\}Q(A)+a_n A+b_n E$ が成り立つことを用いてよいので、この関係式から $A^n$ を求めよ。$\to$ $\begin{pmatrix}* & *\\* & *\end{pmatrix}$ という形で答えよ。

6． 次の論理は、$A$ と $A+B$ が対称行列、$B$ が交代行列のとき、$B=O$（零行列）を証明したものである。かっこに入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

仮定から $A+B$ は対称行列だから、$A+B={}^t((\ 1\ ))={}^tA+(\ 2\ )$ … ①

同じく仮定から、${}^tA=(\ 3\ )$, ${}^tB=(\ 4\ )$, これと①の等式から、$A+B=(\ 5\ )$ $\therefore\ B=O$