2013年度前期末試験問題・数学B（D2）

１． 次の各問いの答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

(1) $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$ で２つのベクトルのなす角が $\dfrac{2}{3}\pi$ のとき、$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|$ を求めよ。

(2) 三角形 OAB において、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし、$\angle AOB$ の二等分線が AB と交わる点を C とするとき、$\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(2,-1)$ のとき、$2\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)+3\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$ の成分表示を求めよ。

(4) 上の (3) のベクトルについて、内積 $\vec{a}\bullet\vec{b}$ を求めよ。

(5) 上の (3) のベクトルについて、$\vec{c}=(-5,5)$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ の線形結合で表せ。

(6) 上の (3) のベクトルについて、$\vec{d}=\vec{a}+t\vec{b}$ とするとき、$\left|\vec{d}\right|=3$ となる t の値を求めよ。

(7) 上の (3) のベクトルについて、$\vec{a}+t\vec{b}$ とベクトル $\vec{e}=(4,-1)$ が平行になるような t の値を求めよ。

(8) 上の (3) のベクトルについて、$\vec{a}+t\vec{b}$ とベクトル $\vec{f}=(1,-3)$ が垂直になるような t の値を求めよ。

(9) 直線 $5x+2y+1=0$ について、その法線ベクトルを１つ求め、成分で表せ。

(10) 直線 $5x+2y+1=0$ について、その方向ベクトルを１つ求め、成分で表せ。

(11) 直線 $5x+2y+1=0$ と点 $(-3,1)$ との距離を求めよ。

(12) $\vec{a}=(3,-9)$, $\vec{b}=(14,k)$ の２つのベクトルが線形従属になるような k の値を求めよ。

２． ４つの数の組からなる $\vec{a}=\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right)$, $\vec{b}=\left(b_1, b_2, b_3, b_4\right)$ とスカラー m に対して、

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4\right),\quad m\vec{a}=\left(ma_1, ma_2, ma_3, ma_4\right)$$

と定義すると、ベクトル空間の７つの公理を満たすことがしられている。さらに内積を

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$$

と定義する。次の各問いに答えよ。ただし、成分とスカラーはすべて実数とし、零ベクトル $\vec{0}$ は当然 $\vec{0}=(0,0,0,0)$ である。

(1) $\vec{a}=(1,3,-2,2)$, $\vec{b}=(2,4,1,3)$, $\vec{c}=(3,5,4,4)$ のとき、$\vec{a}\bullet\vec{b}$, $\vec{b}\bullet\vec{c}$, $\vec{c}\bullet\vec{a}$ を求めよ。

(2) ベクトルの大きさを $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}}$ で定義する。上の (1) のベクトルについて、$\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{b}\right|$, $\left|\vec{c}\right|$ を求めよ。

(3) 上の (1) のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は線形独立か線形従属か調べよ。

(4) $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$ のとき、$\vec{a}$, $\vec{b}$ は直交するといい、$\vec{a}\perp\vec{b}$ と表す。上の (1) のベクトルについて、$\vec{d}=\vec{b}-m\vec{a}$ とするとき、$\vec{a}\perp\vec{d}$ となるスカラー m を求め、$\vec{d}$ の成分表示を求めよ。

３． 線分 AB の中点を M とする。このとき、任意の点 P に対して、$PA^2+PB^2=2\left(PM^2+AM^2\right)$ が成り立つことを、$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{PB}=\vec{b}$ としてベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて証明せよ。

4． $\vec{a}=(\cos\alpha\,,\sin\alpha)\,,\vec{b}=(\cos\beta\,,\sin\beta)$ について、次の各問いに答えよ。

（1） $|\vec{a}|\,,\ |\vec{b}|$ の値を求めよ。ただし、答のみ。

（2） $\vec{c}=\vec{b}-m\vec{a}$ とする。$\vec{a}\perp\vec{c}$ となるようにスカラー m を求め、$\vec{c}$ を成分表示せよ。ただし、$\vec{c}=k(\sin\alpha\,,-\cos\alpha)$ の形（k はスカラー）で答えよ。

（3） $\vec{c}\neq\vec{0}$ を満たすための条件を $\alpha\,,\beta$ を用いて表せ。ただし、答のみ。

（4） 上の（3）の条件を満たすとき、$\vec{c}$ と同じ向きの単位ベクトルを求め、成分表示せよ。

5． 次はベクトル空間の公理である。$\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\,,\vec{x}$ は V の要素でベクトルであり、$m\,,n$ はスカラー（実数）である。

(A1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(A2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(A3) 与えられた $\vec{a}\,,\vec{b}$ に対して、$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$ がただ１つ存在する

(A4) $(mn)\vec{a}=m(n\vec{a})$

(A5) $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$

(A6) $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$

(A7) $1\vec{a}=\vec{a}$

次の文章のかっこに入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

注意： 問題番号を表すためのかっこ:（　）は式で必要なかっこを兼ねていない。例えば、答えが $m(\vec{a}+\vec{b})$ のとき、問題文が m（１）となっている場合、解答用紙には $(\vec{a}+\vec{b})$ とかく。単に $\vec{a}+\vec{b}$ ではバツである。かと言って不必要なかっこはかかないこと。

ベクトルを１つ取り出し、それを $\vec{a}$ とする。公理 A3 から $\vec{a}+\vec{x}=\vec{a}$ … ① を満たす $\vec{x}$ がただ１つ存在するが、この $\vec{x}$ は任意のベクトル $\vec{b}$ に対して、$\vec{b}+\vec{x}=\vec{b}$ を満たすことを公理と①を用いて証明する。公理（１）から、$\vec{a}+\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{y}$ がただ１つ存在する。

$\vec{b}+\vec{x}=(\vec{a}+\vec{y})+\vec{x}$ ＝（２）$+\vec{x}$ ＝ $\vec{y}+$（３）$=\vec{y}+\vec{a}$ ＝（４）$=\vec{b}$

理由： 　A1　A2　A1

また任意のベクトル $\vec{b}$ に対して、$\vec{b}+\vec{z}=\vec{b}$ … ② が成り立つ $\vec{z}$ は、上記 $\vec{x}$ に等しいことも示せる。

$\vec{z}$ ＝（５）　＝ $\vec{x}+\vec{z}$ ＝（６）

理由： ①式で $\vec{a}$ を $\vec{z}$ と考える　A1　②式で $\vec{b}$ を $\vec{x}$ と考える

従って、このような $\vec{x}$ を零ベクトルといい、$\vec{0}$ と表す。あるベクトル $\vec{x}$ が零ベクトルであることを証明するには、任意のベクトル $\vec{b}$ に対して、$\vec{b}+\vec{x}=\vec{b}$ を示せばよい。これを踏まえて、$0\vec{a}=\vec{0}$ を示す。任意のベクトル $\vec{b}$ に対して、公理（７）から $\vec{a}+\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{y}$ がただ１つ存在する。

$\vec{b}+0\vec{a}=(\vec{a}+\vec{y})+0\vec{a}$ ＝ $(\vec{y}+\vec{a})+0\vec{a}$ ＝ $\vec{y}+$（８）＝ $\vec{y}+(1\vec{a}+0\vec{a})$ ＝ $\vec{y}+(1+0)\vec{a}$

理由： 　A1　A2　A7　A5

$=\vec{y}+1\vec{a}$ ＝ (9) ＝ $\vec{a}+\vec{y}=\vec{b}$ $\therefore\ \vec{b}+0\vec{a}=\vec{b}$ より $0\vec{a}=\vec{0}$

理由： A7 A1

任意のスカラー m に対して、$m\vec{0}=\vec{0}$ であることを示す。$m=0$ ならば上の議論から明らかに成り立つ。$m\neq 0$ のとき、任意のベクトル $\vec{b}$ に対して、

$$\vec{b}+m\vec{0} = 1\vec{b}+m\vec{0} = m\,(\ 10\ ) = m\left(\frac{1}{m}\vec{b}\right) = (\ 11\ ) = \vec{b}$$

理由： A7 A6,A4 $\vec{0}$の定義 A4 A7

以上により、$m\vec{0}=\vec{0}$ が示せた。

最後に公理A3から、各ベクトル $\vec{a}$ に対して $\vec{a}+\vec{x}=\vec{0}$ を満たす $\vec{x}$ がただ１つ存在する。これを $-\vec{a}$ と表し、$\vec{a}$ の逆ベクトルという。このとき、$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$ を示す。

$$\vec{a}+(-1)\vec{a} = (\ 12\ )+(-1)\vec{a} = \{1+(-1)\}\vec{a} = 0\vec{a} = \vec{0}$$

理由： A7 A5

6． $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{AD}$ である台形 $ABCD$ において、AB，CD の中点をそれぞれ M，N とする。$\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ とするとき、次のベクトルを k，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。ただし、$k>0$ とし、答のみ。

(1) $\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AN}$ (3) $\overrightarrow{MN}$

7． ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について、$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=l\neq 0$，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ が成り立つとき、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす角 θ を求める次の計算のかっこに入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

注意： [ ] には l の式が、( ) には数値が入る。

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ から $|\vec{c}|=|-(\vec{a}+\vec{b})|=|\vec{a}+\vec{b}|$ $\therefore\ |\vec{c}|^2=[\ 1\ ]+2(\vec{a}\bullet\vec{b})$

よって、$\vec{a}\bullet\vec{b}=[\ 2\ ]$ … ① 一方内積の定義から、$\vec{a}\bullet\vec{b}=[\ 3\ ]\cos\theta$ … ②

①、②より、$\cos\theta=(\ 4\ )$ $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で θ を求めれば、$\theta=(\ 5\ )$（**弧度法で答えよ。弧度法でない場合は点を与えない**）