2013年度前期中間試験問題・数学B（D2）

１．次の条件を満たす２次曲線の方程式を求めよ。**ただし、答のみ。**

（1）　２点 $(1, -5)$，$(-3, 7)$ を直径の両端とする円。

（2）　２点 $(0, 3)$，$(0, -3)$ からの距離の和が１０の曲線。

（3）　２点 $(0, 5)$，$(0, -5)$ が焦点で、点 $(0, 4)$ を通る双曲線。

（4）　焦点が $(3, 0)$ で、準線が $x=-3$ である放物線。

２．次の各問いに答えよ。**ただし、答のみ。**

（1）　円 $x^2+y^2-6x+4y-37=0$ の中心の座標を求めよ。

（2）　（1）の円の半径を求めよ。

（3）　（1）の円と直線 $y=x+3$ の共有点の座標を求めよ。

（4）　２つの円 $x^2+y^2-2x-2y-11=0$，$x^2+y^2+4x-4y-17=0$ の共有点を通る直線の方程式を求めよ。

（5）　２点 $\left(0, \sqrt{5}\right)$，$\left(0, -\sqrt{5}\right)$ が焦点で、短軸の長さが４の楕円の方程式を求めよ。

（6）　双曲線 $4x^2-9y^2=36$ の漸近線の方程式を求めよ。

（7）　放物線 $2x=y^2-4$ の準線の方程式を求めよ。

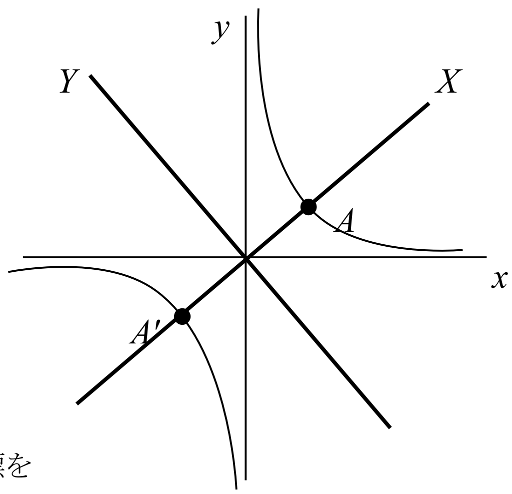
（8）　円 $x^2+y^2=4$ 上の点 $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ における接線の方程式を求めよ。

３．曲線 $xy=1$ すなわち分数関数 $y=\dfrac{1}{x}$ は双曲線であることが知られており、その焦点は直線 $y=x$ 上にあり、２つの焦点は原点に関して対称な位置にある。これを利用して双曲線 $xy=1$ の焦点の座標を求めてみる。次の各問いに答えよ。**ただし、答のみ。**

（1）　直線 $y=x$ を新しい X 軸、直線 $y=-x$ を新しい Y 軸としたとき、この双曲線の漸近線を X，Y の式で表せ。

（2）　双曲線の主軸の長さを求めよ。

（3）　この双曲線の方程式を X，Y の式で表すと
$\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ となる。上の（1），（2）の結果から a，b の値を求めよ。ただし、a，b は正の値。



（4）　この双曲線の焦点の座標を新しい座標で表すとどうなるか。

（5）　上の（4）の結果から双曲線 $xy=1$ の焦点の座標をもとの座標で表せ。

４．不等式 $(x-3y)(2x+y+2)>0$ で表される領域を図示せよ。

５．放物線 $y=a(x-p)^2+q$ について、次の各問いに答えよ。ただし、a，p，q は定数で、$a\neq 0$ とする。

（1）　放物線 $y=ax^2$ の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。**ただし、答のみ。**

（2） 問題の放物線 $y=a(x-p)^2+q$ の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。**ただし、答のみ。**

（3） 放物線 $y=ax^2$ の傾き m の接線の方程式を求めよ。

（4） 問題の放物線 $y=a(x-p)^2+q$ の傾き m の接線の方程式を求めよ。

6． 定点 $A(a\,,0)$ から楕円 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上の点までの距離の最小値を求めるため以下の（ ）に入るもっとも適切な答を解答欄にかけ。**ただし、答のみ。**

楕円上の任意の点を $P(x\,,y)$ とすれば、$AP^2=$（ 1 ）となる。（ 1 ）に楕円の方程式を用いて y を消去し $a\,,x$ だけの式にすれば、$AP^2=$（ 2 ）となる。さらに（ 2 ）を標準形に変形すれば $AP^2=$（ 3 ）となる。ただし、P は楕円上の点だから $|x|\leqq$（ 4 ）である。（ 3 ）を x の２次関数とみて $f(x)$ と表す。これを $|x|\leqq$（ 4 ）の範囲で考える。$|a|\leqq$（ 5 ）ならば $x=2a$ は $|x|\leqq$（ 4 ）を満たすので、このとき AP^2 の最小値は（ 6 ）となる。よって AP の最小値は $\sqrt{（\ 6\ ）}$ となる。$|a|>$（ 5 ）のとき、さらに $a>0$ ならば $f(x)$ は $x=$（ 7 ）で最小となり、最小値は $AP^2=$（ 8 ）^{2} となる。逆に $a<0$ ならば $x=$（ 9 ）で最小となり、最小値は $AP^2=$（ 10 ）^{2} となる。まとめると $|a|>$（ 5 ）のとき、AP の最小値は $\big|$（ 11 ）$-|a|\big|$ となる。

7． 次の各問いに答えよ。

（1） 連立不等式 $7x+25y\leqq 60$, $5x+3y\leqq 25$, $2x+3y\leqq 12$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ の表す領域はおおよそ下図の境界を含む斜線の部分になる。境界の直線の傾きに注意して図の頂点 $A\,,B\,,C\,,D$ の座標を求めよ。

（2） 上の（1）の領域内で $3x+5y$ の最大値とそのときの $x\,,y$ の値を求めよ。

注意：解答用紙に書いてある図に適当に加筆し、それを使って答案をかけ。