2013年度学年末試験問題・数学B（C3）

１． 次の問いに答えよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（1） 行列 $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ。（固有ベクトルは求めなくてよい）

（2） 行列 $\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ。（同上）

（3） 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ。（同上）

（4） 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ。（同上）

（5） 行列 $\begin{pmatrix} -3 & 8 & 2 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ。（同上）

（6） 行列 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ。（同上）

（7） $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とするとき、２次形式 $5x^2 - 8xy + 5y^2$ を ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と表したときの実対称行列 A を求めよ。

（8） 上の（7）の実対称行列 A の固有値を求めよ。（固有ベクトルは求めなくてよい）

（9） $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ およびベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ について、$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす λ の値を求めよ。

（10） 上の（9）の A，$\boldsymbol{x}$ に対して、$A^2\boldsymbol{x}$ を求め、成分表示せよ。

（11） 上の（9）の A と正則行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、$P^{-1}AP$ を求めよ。

２． 上の問題１．（1）の固有値を小さい順に λ_1，λ_2 とするとき、次の問いに答えよ。

（1） λ_1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする。$\boldsymbol{x}_1$ を１つ求めよ。（１個でよい）

（2） λ_2 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする。$\boldsymbol{x}_2$ を１つ求めよ。（１個でよい）

（3） $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix}$ とするとき、$P^{-1}AP$ を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

３． 上の問題１．（6）の固有値を小さい順に λ_1，λ_2 とするとき、次の問いに答えよ。

（1） λ_1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする。<u>大きさが１で（1，1）成分が正となる</u> $\boldsymbol{x}_1$ を求めよ。

（2） λ_2 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする。<u>大きさが１で（1，1）成分が負となる</u> $\boldsymbol{x}_2$ を求めよ。

（3） $T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$ とするとき、${}^tTAT$ を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。

4．R^3 のベクトル $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ とし、$W=\langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) つぎの文章の括弧に入る最も適切なものを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は平行でないから $\dim W=$[1] である。そこで $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ から $Gram-Schmidt$ の直交化法を用いて W の正規直交基底を求める。

Step 1：$\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{a}_1$ と表し、$\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{|\boldsymbol{f}_1|}\boldsymbol{f}_1$ とすれば、$\boldsymbol{u}_1$ の成分表示は [2] となる。

Step 2：$\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2\bullet\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$ とすれば、$\boldsymbol{f}_2$ の成分表示は [3] となる。従って、

$\boldsymbol{u}_2=\dfrac{1}{|\boldsymbol{f}_2|}\boldsymbol{f}_2=$[4] となる。この $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ が W の正規直交基底となる。

(2) W の直交補空間 $W^{\perp}$ の１つの基底を求めよ。

(3) ベクトル $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-5\\7\\-2\end{pmatrix}$ の W への正射影を求めよ。

5．$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

(1) A の固有方程式を求めよ。ただし、答のみ。（未知数を λ とせよ）

(2) A^3-5A^2 を $Cayley-Hamilton$ の定理を用いて求めよ。この定理を用いていない場合は点を与えない。

6．問題１.(3) の行列 $A=\begin{pmatrix}1&8\\2&1\end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

(1) A の固有値を λ_1,λ_2 $(\lambda_1<\lambda_2)$ とするとき、λ_1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ を１つ求めよ。

(2) A の固有値 λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ を１つ求めよ。

(3) $P=(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2)$ とするとき、P^{-1} を求めよ。ただし、答のみ。

(4) 対角化を利用して、A^n を求めよ。ただし、n は自然数。（対角化を用いていない場合は点を与えない）