

## 2012年度学年末試験問題・数学B(C3)

1. 実対称行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$  について、次の問いに答えよ。ただし、 $a \neq 0$  とする。

- (1)  $A$  の固有多項式  $\phi_A(u) = |A - uE|$  を求めよ。ただし、答のみ。
- (2)  $A$  の固有値を求めよ。(Hint: 上で求めた固有多項式の  $u$  に  $1 - a$  を代入)
- (3) 重解でない固有値に対する固有ベクトルで、単位ベクトルとなるものを 1 つ求めよ。
- (4) もう一方の固有値に対する固有ベクトルで互いに直交する単位ベクトルを 2 つ求めよ。
- (5)  $A$  を対角化する直交行列  $T$  を求めて対角化せよ。ただし、答のみ。

以下、(6), (7), (8) は  $a = \frac{1}{2}$  とする。

- (6)  $A^4$  の固有値を求めよ。ただし、答のみ。
- (7)  $4A^3 - 12A^2 + 9A$  を *Cayley-Hamilton* の定理を用いて求めよ。
- (8)  $A^n$  を対角化を利用して求めよ。ただし、 $n$  は自然数とする。
- (9) 零ベクトルでない任意の  $\mathbf{x} = {}^t(x \ y \ z)$  に対して  ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} > 0$  が成り立つ  $a$  の値の範囲を求めよ。

2. つぎの命題で真であるものは○、偽であるものは×を解答欄にかけ。ただし、4 つ以上間違ったら点を与えない。また特に断らない限り  $A$  は  $n$  次の正方行列である。答のみ。

全問正解 : 14 点、誤答が 1 つ : 10 点、2 つ : 5 点、3 つ : 2 点とする。

- (1)  $A$  の異なる固有値に対する固有ベクトルは線形独立である。
- (2)  $A$  の異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する。
- (3)  $A$  は必ず対角化可能である。
- (4)  $A$  の固有方程式が重解をもてば対角化できない。
- (5)  $A$  が直交行列によって対角化可能ならば、 $A$  は実対称行列である。
- (6)  $A, B$  が  $n$  次の正方行列ならば、 $AB$  と  $BA$  の固有値は同じである。
- (7)  $A$  の固有値が 0 だけならば、 $A$  は零行列である。
- (8)  $A$  が実対称行列ならば、異なる固有値に対する固有ベクトルは線形独立である。
- (9)  $A$  が実対称行列ならば、異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する。
- (10)  $\phi_A(u)$  が  $A$  の固有多項式ならば、 $\phi_A(A)$  は零行列である。
- (11)  $A$  が実対称行列ならば、任意の零でないベクトル  $\mathbf{x} = {}^t(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$  に対して  ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} > 0$  である。
- (12)  $\lambda$  を  $A$  の固有値とし、その固有空間を  $V(\lambda)$  とすれば、 $\dim V(\lambda) = \text{rank}(A - \lambda E)$  である。ただし、 $E$  は  $n$  次の単位行列。
- (13)  $V(\lambda)$  は上と同じとする。このとき、 $\dim V(\lambda) \geq 1$  である。
- (14)  $A$  とその転置行列  ${}^tA$  の固有値は同じである。

3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  について、次の問いに答えよ。ただし、答のみ。

(1)  $A$  の固有値を求めよ。

上で求めた固有値を、 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  とする。

(2)  $\lambda_1$  に対する固有ベクトル  $\mathbf{x}_1$  を求めよ。

(3)  $\lambda_2$  に対する固有ベクトル  $\mathbf{x}_2$  を求めよ。

(4)  $\lambda_3$  に対する固有ベクトル  $\mathbf{x}_3$  を求めよ。

(5)  $A$  を対角化せよ。またその時の対角化行列  $P$  を求めよ。

4.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  について、次の問いに答えよ。

(1)  $A$  の固有値とそれに対する固有ベクトルを求めよ。またその結果から  $A$  は対角化可能か理由を述べて答えよ。

(2)  $\phi_A(u)$  を  $A$  の固有多項式とする。このとき、単項式  $u^n$  を  $\phi_A(u)$  で割ったときの余りを求めよ。ただし、 $n$  は自然数。

*Hint:*  $\phi_A(u)$  は  $u$  の 2 次式だから余りは  $u$  の 1 次以下の整式になる。

(3) 上の (2) の結果と *Cayley-Hamilton* の定理を用いて  $A^n$  を求めよ。ただし、最終の解の形

は  $k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  で、 $a, b, c, d$  は  $n$  の 一次式 とせよ。