2013年度後期中間試験問題・数学B（C3）

１．次の問いに答えよ。ただし、答のみ。

（1）　$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$　$(a>0)$ で表される線形変換により、円 $x^2+y^2=1$ はどのような図形に写されるか、その方程式を求めよ。

（2）　線形変換 f，g を表す行列をそれぞれ $F=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$G=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ とするとき、合成変換 $g\circ f$ を表す行列を求めよ。

（3）　（2）において、逆変換 g^{-1} を表す行列を求めよ。

（4）　（2）において、g により点 $(5,4)$ に写るもとの点の座標を求めよ。

（5）　$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ で表される線形変換を f とするとき、合成変換 $f\circ f$ を表す行列を求めよ。

２．次の文章の括弧に入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。

点 (x,y) を直線 $y=\sqrt{3}\,x$ に関して対称な点 (x',y') に写す線形変換を表す行列を求める。まず原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させる線形変換 f を表す行列は（ １ ）である。また x 軸に関して対象移動させる線形変換 g を表す行列は（ ２ ）である。従って求める行列は（ ３ ）である。

３．次の文章の［　］に入るもっとも適切な２次の正方行列を解答用紙にかけ。ただし、答のみ。
なお、E は２次の単位行列で、答えの行列の成分はすべて数値である。

ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ に写す線形変換を表す行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=$［ 1 ］となる。両辺を転置すれば［ 2 ］$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=$［ 3 ］となる。
よって行列（［ 2 ］　［ 3 ］）に行基本変形を用いて変形すると（E　［ 4 ］）となる。従って $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=$［ 5 ］となる。

４．双曲線 $x^2-y^2=a^2$　$(a>0)$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたときの図形の方程式を求めよ。

５．行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される線形変換を f とする。ただし、$ad-bc>0$．この変換 f による点 $P(2,1)$ の像を P'、点 $Q(1,2)$ の像を Q' とする。原点を O として、次の問いに答えよ。ただし、ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を隣り合う２辺とする<u>平行四辺形</u>の面積は行列式 $\left|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\right|$ の値の<u>絶対値</u>であることを用いてよい。

（1）　三角形 OPQ と三角形 $OP'Q'$ の面積を求めよ。

（2） 三角形OPQ と三角形$OP'Q'$ の面積が等しく、点P' がQ に一致するとき、Q' の座標をa だけを用いて表せ。

6． A をn 次の正方行列、E をA と同じ次数の単位行列とし、$\underline{E+A}$ は正則とする。このとき、$F=(E-A)(E+A)^{-1}$ で表わされる線形変換f を考える。（これを$Cayley$ 変換という）次の問いに答えよ。

（1） $(E+F)(E+A)=kE$ （k は数）となる。k の値を求めよ。ただし、答のみ。

（2） $(E+F)^{-1}=l(E+A)$ （l は数）である。l の値を求めよ。ただし、答のみ。

（3） $A=(E-F)(E+F)^{-1}$ を示せ。

7． 次の文章の括弧に入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。なお［　］は行列または文字式、（　）は数値が入る。

A を２次の正方行列としA で表わされる線形変換をf とする。このとき、任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\left|f\left(\boldsymbol{x}\right)\right|=k\left|\boldsymbol{x}\right|$ が成り立つとする。ただし、k は正の定数。

$\left|f\left(\boldsymbol{x}\right)\right|^2=\left|A\boldsymbol{x}\right|^2={}^t\boldsymbol{x}$［ 1 ］$\boldsymbol{x}=k^2\left|\boldsymbol{x}\right|^2$ $\therefore$ ${}^t\boldsymbol{x}$（［ 2 ］）$\boldsymbol{x}=0$ が任意のベクトル$\boldsymbol{x}$ に対して成り立つから、${}^tAA=$［ 3 ］ ただし、E は２次の単位行列。従ってA を列ベクトルを用いて$A=\left(\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2\right)$ とすれば、$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_2=$［ 4 ］，$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=0$ となる。

いま、$A=\begin{pmatrix}-1 & a\\ b & 1\end{pmatrix}$，$k=3$ のときを考える。上記の考察から、$1+a^2=$（ 5 ），$1+b^2=$（ 5 ），$b-a=0$ となるので、$a=b=$（ 6 ）となる。

8． $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 1 & a\end{pmatrix}$ で表わされる線形変換によって、直線l：$y=bx+2$ がそれ自身に写されるとき、次の問いに答えよ。

（1） a とb の値を求めよ。

（2） 直線l 上にあって、この線形変換で不変$\left(A\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}\right)$ なベクトルを求めよ。

9． 次の文章の括弧に入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。なお［　］は文字式、（　）は数値、<　>は行列が入る。

１列目が$\boldsymbol{a}_1={}^t\left(0 \ \ -1/\sqrt{6} \ \ 2/\sqrt{6} \ \ 1/\sqrt{6}\right)$ の交代行列でかつ直交行列A を求める。A は交代行列なので

$$A=\begin{pmatrix}0 & (\ 1\ ) & (\ 3\ ) & (\ 5\ )\\ -1/\sqrt{6} & (\ 2\ ) & [\ 4\ ] & [\ 6\ ]\\ 2/\sqrt{6} & a & (\ 2\ ) & [\ 7\ ]\\ 1/\sqrt{6} & b & c & (\ 2\ )\end{pmatrix}$$

となり、j 列目の列ベクトルを$\boldsymbol{a}_j$ $\left(1\leqq j\leqq 4\right)$ と表す。さらにA は直交行列だから、$i\neq j$ ならば$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j=$（ 8 ）

$\therefore$ $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_4=$（ 8 ）から、$a=$［ 9 ］，$b=$［ 10 ］

（[9]，[10] は c の式） これと $\boldsymbol{a}_2 \bullet \boldsymbol{a}_2$ =（ 11 ）から c =（ 12 ）

$\therefore$ a =（ 13 ），b =（ 14 ）（複号同順）これらは A が直交行列であるための他の条件も満たす。

$\therefore$ A =＜ 15 ＞（複号同順）

１０． 問題６と同じ設定のとき、A が交代行列ならば F が直交行列になることの証明が以下の文章である。括弧に入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。なお等号の下にある $a \sim e$ は以下の理由を示している。その理由が出てくるまで先走った変形は行わないこと。とくに ${}^tE$，${}^tA$ は理由 d が出てくるまでそのままにしておくこと。くどいようだが（ １ ），（ ２ ）の段階で c の事実を使わないこと。

a： 一般に ${}^t(LM) = {}^tM\,{}^tL$ が成り立つから

b： 一般に正則行列 M の転置行列も正則で、$\left({}^tM\right)^{-1} = {}^t\left(M^{-1}\right)$ が成り立つから

c： 一般に ${}^t\left(L \pm M\right) = {}^tL \pm {}^tM$ （複号同順）が成り立つから

d： E は対称行列、A は交代行列だから

e： $(E+A)(E-A) = E^2 - A^2 = (E-A)(E+A)$ $\therefore$ $(E+A)(E-A) = (E-A)(E+A)$

（ここから）

${}^tF = {}^t\left\{(E-A)(E+A)^{-1}\right\} \underset{a}{=}$ （ １ ）$\underset{b}{=}$（ ２ ）$\underset{c}{=}$（ ３ ）$\underset{d}{=}$（ ４ ）

$\therefore$ ${}^tFF$ =（ ４ ）$(E-A)(E+A)^{-1} \underset{e}{=}$ （ ５ ）$= E^2 = E$ 従って F は直交行列。