2012年度後期中間試験問題・数学B（C3） 2012年12月3日

1．線形変換 $f:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2$, $f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$, $g:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2$, $g(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -7\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

について、次の問いに答えよ。<u>ただし、答のみ</u>。（各2点）

（1） 合成変換 $f\circ g$ を表す行列を求めよ。　（2） 合成変換 $g\circ f$ を表す行列を求めよ。

（3） 合成変換 $f\circ f$ を表す行列を求めよ。　（4） f の逆変換 f^{-1} を表す行列を求めよ。

（5） g の逆変換 g^{-1} を表す行列を求めよ。

（6） $f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}7\\ 4\end{pmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

（7） $g(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

以下、f, g を表す行列をそれぞれ A, B とする。

（8） A の固有値を求めよ。　（9） B の固有値を求めよ。

（10） A の逆行列 A^{-1} の固有値を求めよ。　（11） B の逆行列 B^{-1} の固有値を求めよ。

（12） A の固有値のうち、小さい方の固有値に対する固有ベクトルの１つを $\begin{pmatrix}a\\ 1\end{pmatrix}$ とするとき a を求めよ。

（13） B の固有値のうち、大きい方の固有値に対する固有ベクトルの１つを $\begin{pmatrix}b\\ 1\end{pmatrix}$ とするとき b を求めよ。

（14） A^{-1} の固有値のうち、大きい方の固有値に対する固有ベクトルの１つを $\begin{pmatrix}c\\ 1\end{pmatrix}$ とするとき c を求めよ。

2．$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ 2 & 3 & -2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、E は３次の単位行列である。

（1） A の固有多項式 $\phi_A(u)=|A-uE|$ を求めよ。<u>ただし、答のみ</u>。（2点）

（2） A の固有値を求めよ。<u>ただし、答のみ</u>。（2点）

上で求めた固有値を λ_1, λ_2 とする。ただし、$\lambda_1>\lambda_2$

（3） $A-\lambda_1 E$ の階数、すなわち $rank\,(A-\lambda_1 E)$ を求めよ。（5点）

（4） λ_1 に対する固有空間 $V(\lambda_1)$ の次元と１組の基底を求めよ。（5点）

（5） $rank\,(A-\lambda_2 E)$ を求めよ。（4点）

（6） λ_2 に対する固有空間 $V(\lambda_2)$ の次元と１組の基底を求めよ。（7点）

3．A を２次の直交行列とする。このとき次の（　　）に入るもっとも適切な値、式、行列などを解答欄にかけ。<u>ただし、答のみ</u>。（各1点）

${}^tAA=$（ 1 ）だから、$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば、

$a^2+c^2=$（ 2 ） … ①　　$b^2+d^2=$（ 3 ） … ②　　$ab+cd=$（ 4 ） … ③

極座標で考えれば①から $a=\cos\theta$，$c=$（ 5 ），②から $b=\cos\omega$，$d=$（ 6 ）と表せる。これらを③に代入すると、$ab+cd=\cos$((7))=（ 4 ）となる。従って、

（ 7 ）$=2n\pi\pm$（ 8 ），ただし、n は整数。$\therefore\ \omega=\theta+$（ 9 ），よって b，d も θ のみの式で表すことができて、

$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & (\ 10\ ) \\ (\ 5\ ) & \cos\theta \end{pmatrix}$ または $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & (\ 11\ ) \\ (\ 5\ ) & (\ 12\ ) \end{pmatrix}$ となる。最初の A の行列式の値は（ 13 ）で、２番目の A の行列式の値は（ 14 ）である。

４． R^2 の線形変換 $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ ，$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

（1） R^2 の１つの基底として $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとる。$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ の f による像を求めよ。（2点）

（2） $f(\boldsymbol{a}_1)=\alpha_{11}\boldsymbol{a}_1+\alpha_{21}\boldsymbol{a}_2$，$f(\boldsymbol{a}_2)=\alpha_{12}\boldsymbol{a}_1+\alpha_{22}\boldsymbol{a}_2$ を満たす α_{ij} を求めよ。（6点）

（3） $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{pmatrix}$ とおくとき、$P^{-1}AP$ を求めよ。（3点）

５． $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & a \\ b & c & d \end{pmatrix}$ が直交行列になるよう a，b，c，d の値を求めよ。（10点）

６． $A^2=A$ を満たす（これをべき等という）正方行列の固有値は０か１であることを証明せよ。（6点）

７． A を３次の正方行列とし、その固有値を $\lambda_1=-2$ （2重解），$\lambda_2=3$ とする。このとき、次の問いに答えよ。<u>ただし、答のみ</u>。（各2点）

（1） A の固有多項式 $\phi_A(u)=|A-uE|$ を求めよ。

（2） $tr\,A$ の値を求めよ。

（3） $|A|$ の値を求めよ。