2013年度前期末試験問題・数学B（C3）

全体の注意

行列式の値で、とくに 0 になるものは、それが明確にわかる行列式の変形の過程をかけ。またサラスの方法で計算、もしくはそう思われるものには点を与えない。

例：
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 & 15 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 15 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

（１行目をつかって１列を掃き出す　　　１列目で展開）

この解答は、最後の等式でサラスを用いたと判断し、点を与えない。ではどうしたらよいか。続き

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 15 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 15 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

（３行目から３を括りだす　　３列目 −１列目）

これはよい。最後の等式は、同じ成分からなる２つの列があることが明確だから。

１．つぎの文章のかっこに入るもっとも適切な答えを答案用紙にかけ。ただし、答のみ。

注意：（　）は数値、[　] は行列を答えよ。行列は公式などではなく、実際に計算したものをかけ。また答案用紙の問題番号に気をつけること。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき、$|A| =$（ 1 ）であり、A の (i, j) 成分の余因子を $\tilde{a}_{ij}$ と表せば、

$\tilde{a}_{11} =$（ 2 ），$\tilde{a}_{12} =$（ 3 ），$\tilde{a}_{13} =$（ 4 ），$\tilde{a}_{21} =$（ 5 ），$\tilde{a}_{22} =$（ 6 ），$\tilde{a}_{23} =$（ 7 ），

$\tilde{a}_{31} =$（ 8 ），$\tilde{a}_{32} =$（ 9 ），$\tilde{a}_{33} =$（ 10 ）となる。従って A の余因子行列を $\tilde{A}$ と表せば

$|\tilde{A}| =$（ 11 ），$A\tilde{A} = \tilde{A}A =$（ 12 ）$E$ となる。ただし、E は３次の単位行列。$|A^{-1}| =$（ 13 ）

であり、また $\tilde{A}$ の余因子行列を $\tilde{\tilde{A}}$ と表せば、$|\tilde{\tilde{A}}| =$（ 14 ）である。具体的に $A^{-1} =$ [15]，

$\tilde{\tilde{A}} =$ [16] となる。

話しは変わって、A, B はともに４次の正方行列で、$|A| = 2$，$|B| = -3$ とする。このとき、

$|AB| =$（ 17 ），$||A|B| =$（ 18 ），$||B|A| =$（ 19 ），$|\tilde{A}| =$（ 20 ），$|\tilde{B}| =$（ 21 ），

$|A^{-1}| =$（ 22 ），$|B^{-1}| =$（ 23 ），$|{}^tB| =$（ 24 ）である。

２．つぎの行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ ただし、$\omega^3 = 1$，$\omega \neq 1$

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

3．つぎの行列式を因数分解せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha \\ 1 & \cos\beta & \cos 2\beta \\ 1 & \cos\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a+b & b & b & b & b \\ b & a+b & b & b & b \\ b & b & a+b & b & b \\ b & b & b & a+b & b \\ b & b & b & b & a+b \end{vmatrix}$

4．つぎの文章のかっこに入るもっとも適切な答えを答案用紙にかけ。ただし、答のみ。

注意：（１）,（２）,（５）は B の成分を表す記号で、（３）,（４）,（６）,（８）,（９）は列ベクトルを用いて答えよ。

$A=(a_{ij})$ は３行２列、$B=(b_{ij})$ は２行３列の行列で、列ベクトルを用いて表すと

$A=(\vec{a}_1 \ \ \vec{a}_2)$, $B=(\vec{b}_1 \ \ \vec{b}_2 \ \ \vec{b}_3)$ とする。また、$\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。このとき、

$\vec{b}_j=$（ １ ）$\vec{e}_1+$（ ２ ）$\vec{e}_2$　($j=1,2,3$) となる。

$|AB|=\left|A\vec{b}_1 \quad (\ 3\ ) \quad (\ 4\ )\right|=\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}(\ 5\ )\,b_{r3}\left|A\vec{e}_p \quad A\vec{e}_q \quad (\ 6\ )\right|$

p, q, r の値は１か２なので、このうちの少なくとも２つの値は等しくなる。従って、

$\left|A\vec{e}_p \quad A\vec{e}_q \quad (\ 6\ )\right|=(\ 7\ )$　なお、$A\vec{e}_p=\vec{a}_p$, $A\vec{e}_q=$（ ８ ）, $A\vec{e}_r=$（ ９ ）である。以上より、

$|AB|=$（ 10 ）

5．$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、連立１次方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ を考える。つぎの問いに答えよ。

(1)　$|A|$ を因数分解せよ。

(2)　$|A|=0$ となる k の値のうち、小さい方の値を k がとるとき、$A\vec{x}=\vec{0}$ を解け。

(3)　$|A|=0$ となる k の値のうち、大きい方の値を k がとるとき、$A\vec{x}=\vec{0}$ を解け。

6．$\vec{a}_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線形独立か線形従属か、行列式を用いて判定せよ。