2012年度前期末試験問題・数学B（C3）

１．次の（　）に入るもっとも適切な答えを解答欄に書け。ただし、答のみ。

置換 $P=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&1&5&4&3\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&3&5&2&6\end{pmatrix}$ について、P を同じ数字を含まない巡回置換の積で表すと $P=$（ 1 ）、同様にして $Q=(1,4,5,2)$ となる。すべてを互換で表せば $P=$（ 2 ）、$Q=(1,2)\,(1,5)\,(1,4)$ となる。従って、$sgn\,(P)=$（ 3 ）、$sgn\,(Q)=$（ 4 ）となる。積は $PQ=$（ 5 ）, $QP=$（ 6 ）であり、逆置換は $P^{-1}=$（ 7 ）, $Q^{-1}=$（ 8 ）となる。

$A=\begin{pmatrix}1&1&0&3\\-1&3&4&2\\2&3&5&4\\3&-2&-2&2\end{pmatrix}$ のとき、(2, 3) 成分の小行列式 $D_{2\,3}$ の値は（ 9 ）、また A の２次の小行列 $A\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}=$（ 10 ）だから、$\left|A\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}\right|$ の値は（ 11 ）となる。$|A|$ の値を求めるために１列目を用いて $|A|=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-1&4&4&(\ 12\ )\\2&(\ 13\ )&5&-2\\3&-5&-2&-7\end{vmatrix}$ 従って、$|A|$ の値は（ 14 ）である。従って逆行列が存在し $\left|A^{-1}\right|$ の値は（ 15 ）、また A の余因子行列を $\widetilde{A}$ とすれば $\left|\widetilde{A}\right|$ の値は $3^{(\ 16\ )}$ である。さらに $\left|{}^tA\right|$ の値は（ 17 ）である。

$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ のとき、次の $Gram$ の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\\(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)\end{vmatrix}=(\ 18\ ),\quad \begin{vmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)&(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)\\(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)&(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\\(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)&(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3)\end{vmatrix}=(\ 19\ )$$

$$\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)&(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)&(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_4)\\(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)&(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)&(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4)\\(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)&(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3)&(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)\\(\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_2)&(\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_3)&(\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_4)\end{vmatrix}=(\ 20\ )$$

２．$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\4&1&-3\\-1&2&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-4\\2\\-6\end{pmatrix}$ のとき、$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を $Crammer$ の公式を用いて求める次の解答の（　）に入るもっとも適切な答えを解答欄に書け。ただし、答のみ。

$|A|=$ (1) である。A を列ベクトルを用いて $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{pmatrix}$ と表せば ${}^t\boldsymbol{a}_2=$ (2) となる。
この表記を用いれば、(注意：(2) は転置したものを解答する)

$\begin{vmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix}=$ (3), $\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix}=$ (4), $\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}\end{vmatrix}=$ (5) という値が求まる。

$A\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合で表せば、$A\boldsymbol{x}=$ (6) $\boldsymbol{a}_1+y\,\boldsymbol{a}_2+$ (7) $\boldsymbol{a}_3$ だから、例えば

$\begin{vmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A\boldsymbol{x} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix}$

$=$ (8) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix}+$ (9) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix}$ となる。

$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix}=$ (10) だから、これを上式に代入して

$\begin{vmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix}=$ (11) $|A|$ が導ける。従って、$x=$ (12) という値が求まる。同様にして
$y=$ (13), $z=$ (14) という値が求まる。

3． 次の行列式を求めよ。

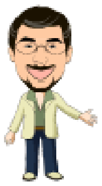
(1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$　　　(2) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$

4． A を l 次の正方行列とし、その余因子行列を $\widetilde{A}$ とする。次の文章の (　) に入るもっとも適切な答えを解答欄に書け。ただし、答のみ。

A の (i, j) 成分の余因子を $\widetilde{a}_{ij}$ と表す。また A の (i, j) 成分の小行列式を D_{ij} と表せば、
$\widetilde{a}_{ij}=$ (1) D_{ij} である。A の (i, j) 成分が a_{ij} であるとき、$\displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_{ik}\,\widetilde{a}_{jk}=\begin{cases}(\ 2\ ) & (i=j)\\ (\ 3\ ) & (i\neq j)\end{cases}$

従って、$A\widetilde{A}=$ (4) E が成り立つ。ただし、E は l 次の単位行列。同様にして
$\displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_{ki}\,\widetilde{a}_{kj}=\begin{cases}(\ 5\ ) & (i=j)\\ (\ 6\ ) & (i\neq j)\end{cases}$ が成り立つので $\widetilde{A}A=$ (7) E も成り立つ。従って $|A|\neq 0$ ならば A は正則で $A^{-1}=$ (8) ところで $|A\widetilde{A}|=|A|^{(\ 9\ )}$ だから $|A|\neq 0$ ならば
$|\widetilde{A}|=|A|^{(\ 10\ )}$ が成り立つ。またもし $|A|=0$ ならば $|\widetilde{A}|=$ (11) である。なぜならこれが成り立たなければ $\widetilde{A}$ は正則になるから $A\widetilde{A}=$ (4) E から $A=$ (12) となり、余因子行列の定義から $\widetilde{A}=$ (13) となる。これは $\widetilde{A}$ が正則であることに矛盾する。従っていずれの場合も
$|\widetilde{A}|=|A|^{(\ 14\ )}$ が成り立つ。

(裏もあり)



$A\widetilde{A}$ がどうなるか大切だと授業で言ったよね

5． $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\5&6&5\end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

(1)　A は正則か。正則ならば余因子行列を用いて A の逆行列を求めよ。余因子行列を用いていない場合は点を与えない。

(2)　A の余因子行列 $\widetilde{A}$ は正則か。正則ならばその逆行列 $\left(\widetilde{A}\right)^{-1}$ を求めよ。ただし、答のみ。

(3)　A の余因子行列の余因子行列、$\widetilde{\widetilde{A}}$ を求めよ。ただし、答のみ。

6．連立１次方程式 $\begin{pmatrix}4&k\\2&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ が $x=y=0$ 以外の解をもつように定数 k の値を求めよ。また、そのときの解を求めよ。

7．$\begin{vmatrix}1+x^2&xy&xz\\yx&1+y^2&yz\\zx&zy&1+z^2\end{vmatrix}=1+x^2+y^2+z^2$ を証明するための以下の論理の（　）の中に入るもっとも適切な答えを解答欄に書け。ただし、答のみ。

１列目の各成分を２つの数の和と考えて、

与式 $=\begin{vmatrix}(\ 1\ )&xy&xz\\yx&1+y^2&yz\\zx&zy&1+z^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&xy&xz\\(\ 2\ )&1+y^2&yz\\(\ 3\ )&zy&1+z^2\end{vmatrix}$

第２項 $=\begin{vmatrix}(\ 4\ )&(\ 5\ )\\zy&(\ 6\ )\end{vmatrix}=(\ 7\ )$ となる。第１項は１列目と１行目から共通因数 x をそれぞれくくりだして、その後１行目を用いて変形すれば

第１項 $=x^2\begin{vmatrix}1&y&z\\(\ 8\ )&1+y^2&yz\\(\ 9\ )&zy&1+z^2\end{vmatrix}=x^2\begin{vmatrix}1&y&z\\0&(\ 10\ )&(\ 11\ )\\0&(\ 12\ )&(\ 13\ )\end{vmatrix}=(\ 14\ )$

以上により証明された。

8．３つのベクトル $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}x\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}x\\0\\1\end{pmatrix}$ が線形従属になるように x の値を行列式を用いて求めよ。行列式を用いていない場合は点を与えない。