2012年度夏休み明け試験・数学B（C3）

１． n 次元実数ベクトル空間 R^n の r 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が生成する（張る）部分空間を W 、その直交補空間を $W^{\perp}$ とする。次の（　）に当てはまる最も適当な数値、式、文字、記号、言葉等を解答欄に書け。ただし、答のみ。（1点×14＝14点）

注意： 零ベクトルと数の零を区別せよ。零ベクトルに限って、$\vec{0}$ と書け。その他のベクトルは太字。

$W=\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n \;\middle|\; \boldsymbol{x} = (\ 1\ )\right.$ ただし $k_1, k_2, \cdots, k_r$ は任意の実数$\left.\right\}$ である。$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ のうち線形独立なベクトルの最大個数を s 個とすれば、$dim\ W=$（ 2 ）である。これは行列 A を $A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_r \end{pmatrix}$ とするときの A の（ 3 ）に等しい。$W \cap W^{\perp}=$（ 4 ）である。これを示す。$\boldsymbol{x} \in W \cap W^{\perp}$ ならば $\boldsymbol{x} \in W$ かつ $\boldsymbol{x} \in$（ 5 ）だから $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}} =$（ 6 ）従って $\boldsymbol{x}=$（ 7 ）となり証明された。$dim\ \mathrm{R}^n=$（ 8 ）で $dim\ \mathrm{R}^n = dim\ W + dim\ W^{\perp} - dim$（ 9 ）だから、$dim\ W = p$ とすれば $dim\ W^{\perp}=$（ 10 ）である。R^n は W と $W^{\perp}$ の直和になる。即ち記号で表せば $\mathrm{R}^n=$（ 11 ） $\boldsymbol{b}$ を R^n の任意のベクトルとすれば $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} \in W,\ \boldsymbol{y} \in W^{\perp}$ と（ 12 ）に表せる。この $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{b}$ の W への（ 13 ）という。このとき $\left(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x}\right) \bullet \boldsymbol{x}=$（ 14 ）となる。

２． ３次元実数ベクトル空間 R^3 のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

について、$W_1=\left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1 \right\rangle$, $W_2=\left\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2 \right\rangle$ とする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、R^3 の内積は標準内積とする。

（1） 交空間 $W_1 \cap W_2$ の次元と１組の基底を求めよ。（7点）

（2） W_1 の直交補空間 $W_1{}^{\perp}$ を求めよ。（4点）

（3） W_2 の直交補空間 $W_2{}^{\perp}$ を求めよ。（4点）

（4） 和空間 $W_1{}^{\perp}+W_2{}^{\perp}$ を求めよ。（直交補空間の和空間であることに注意）（4点）

（5） $\left(W_1 \cap W_2\right)^{\perp}$ を求めよ。（4点）

３． $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ によって生成される R^4 の部分空間を W とするとき、$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ の W への正射影 $\boldsymbol{a}$ と $W^{\perp}$ への正射影 $\boldsymbol{b}$ を求めよ。（13点）

○ 以下の問題は配点には加えず、解いたものには加点する。

4． $M(2,2;\mathrm{R})$ のベクトル $A_1=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ によって生成される部分空間を W とする。次の問いに答えよ。

（1） W の次元と１組の基底を求めよ。(5点)

（2） $M(2,2;\mathrm{R})$ の自然内積を $A \bullet B = tr\,{}^tAB$ と定義する。このとき、$A_1 \bullet A_2$ を求めよ。ただし、A を正方行列とするとき $tr\,A$ は A の対角成分の総和を表す。(5点)

（3） 自然内積における W の直交補空間 $W^{\perp}$ を求めよ。(7点)