2013年度前期中間試験問題・数学B（C3）

１． $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ の逆行列を求める以下の解法のかっこに入るもっとも適切な答を解答欄にかけ。なお、［　］は行列、（　）は数値、＜　＞は a,b,c,d の多項式が入る。ただし、**答のみ**。

まず A が正則となる条件を求める。$c=0$ のとき、明らかに $rank\,A<$（ １ ）だから、まず $c\neq 0$ である。このとき消去法により＜ ２ ＞$=0$ ならば $rank\,A=$（ ３ ）だから A が正則となるための条件は＜ ４ ＞$\neq 0$ である。この条件のとき $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c & d & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

この状態から２行目－１行目×$\dfrac{a}{c}$ と変形すれば →［ ５ ］となる。この状態から２行目を c 倍すれば［ ５ ］→［ ６ ］となる。次に１行目－２行目×$\dfrac{d}{bc-ad}$ と変形すれば［ ６ ］→［ ７ ］となる。最後に１行目÷c，２行目÷$(bc-ad)$，３行目÷c とすれば［ ７ ］→［ ８ ］となる。以上により、$A^{-1}=$［ ９ ］$=\dfrac{1}{ad-bc}$［ 10 ］

２． $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす３次の正方行列 X を消去法により求めよ。

３．行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ について、次のかっこに入るもっとも適切な答えを解答欄にかけ。ただし、**答のみ**。なお、［　］は行列、（　）は数値、記号、＜　＞は用語が入る。

A に行基本形系をほどこす。まず１行目と２行目を交換し、その後新しい１行目を用いて１列目を掃き出す。つまり $(2,1)$ 成分と $(3,1)$ 成分を０にすると $A\to$［ １ ］となるから、

$rank\,A=$（ ２ ）である。列ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ と零ベクトル $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けば、$x+$（ ３ ）$y+$（ ４ ）$z+$（ ５ ）$w=0$ 従って

$\boldsymbol{x}=y\begin{pmatrix} (\ 6\ ) \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} (\ 7\ ) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} (\ 8\ ) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　（y,z,w は任意の数）

この解をAの< 9 >といい、記号で（ 10 ）とかく。

4．連立１次方程式 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ を消去法で解け。消去法を用いていない場合は点を与えない。

5．$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ a-2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ のとき、次の問いに答えよ。

（1） $rank\, A$ および $rank \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を求めよ。

（2） 連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け。

6．次の行列式の値を求めよ。ただし、**答のみ**。

（1） $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 6 \end{vmatrix}$　（2） $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$　（3） $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{vmatrix}$

（4） $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

7．次のかっこの中に入るもっとも適切な答えを解答欄にかけ。ただし、**答のみ**。

置換 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ のとき、$PQ =$（ 1 ），$QP =$（ 2 ）

$P^{-1} =$（ 3 ），$Q^{-1} =$（ 4 ）である。また、$sgn\, P =$（ 5 ），$sgn\, Q =$（ 6 ），

$sgn\, PQ =$（ 7 ），$sgn\, QP =$（ 8 ），$sgn\, P^{-1} =$（ 9 ），$sgn\, Q^{-1} =$（ 10 ）となる。