2012年度前期中間試験問題・数学B（C3）

１．連立１次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ を掃き出し法を用いて解け。

２．次の行列の階数を掃き出し法で求めよ。

(1)　$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$　　(2)　$B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

３．次の行列式を計算せよ。ただし、答のみ。

(1)　$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$　　(2)　$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$　　(3)　$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

(4)　$\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}$

４．$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$rank\,A$ の値を掃き出し法で求めよ。

(2)　$ker\,A$ を求めよ。$ker\,A$ とは、$A\vec{x}=\vec{0}$ の解のことである。

(3)　$A\vec{x}=\vec{b}$ を掃き出し法で求めよ。

５．$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & -a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、a は実数とする。

(1)　$rank\,A$ の値を掃き出し法で求めよ。

(2)　A が正則のとき、その逆行列を掃き出し法で求めよ。

６．連立１次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

(1)　この連立１次方程式が解をもつとき、a の値を求めよ。

（2）　a が（1）で求めた値のとき、この連立１次方程式の解を求めよ。

（3）　この連立１次方程式の係数行列を A とする。$ker\,A$ を求めよ。ただし、答のみ。

７．連立１次方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ について記述した次の文章の（　）内に適当な言葉、記号、文字、式、値を入れよ。ただし、答のみ。

A を（ 1 ）行列といい、A に定数項からなる列ベクトルを加えた $C=\begin{pmatrix} A & \vec{b} \end{pmatrix}$ を（ 2 ）行列という。この連立１次方程式の式の個数が n 、未知数の個数が m であるとき、A は（ 3 ）型の行列になる。A を列ベクトルで表わしたとき、この列ベクトルのなかで線形独立なベクトルの最大個数を A の（ 4 ）といい、記号で（ 5 ）とかく。この方程式が解をもつための必十条件は（ 4 ）を用いて表せば（ 6 ）となる。$A\vec{x}=\vec{0}$ （ただし、$\vec{0}$ は零ベクトル）の解全体を A の（ 7 ）といい、記号で（ 8 ）とかく。A が（ 3 ）型のとき、$A\vec{x}=\vec{0}$ が $\vec{x}\neq\vec{0}$ となる解をもつための必十条件は（ 5 ）<（ 9 ）である。

（ 5 ）$\leqq min\,(m\,,n)$ だから、（ 10 ）<（ 9 ）ならば $A\vec{x}=\vec{0}$ は必ず $\vec{x}\neq\vec{0}$ となる解をもつ。

以下、A は n 次の正方行列とする。A が正則であるための必十条件は（ 5 ）=（ 11 ）であり、このとき A^{-1} を用いれば $A\vec{x}=\vec{b}$ の解は $\vec{x}=$（ 12 ）となる。$A\vec{x}=\vec{b}$ が解をもつとき（ 13 ）−（ 5 ）の値を解の自由度という。従って、解の自由度＝（ 14 ）のとき、A は正則であるといえる。

８．次のことを証明せよ。ただし、$A: m\times n$ 型、$B: n\times l$ 型の行列とする。

（1）　列ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p$ が $ker\,A$ のベクトルならば、$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p$ の任意の線形結合も $ker\,A$ のベクトルである。

（2）　$rank\,AB \leqq rank\,B$

Hint：　B を列ベクトルを用いて $\begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_l \end{pmatrix}$ と表せば、

$AB=\begin{pmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_l \end{pmatrix}$ だから $A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \cdots, A\vec{b}_l$ 中から最大個数 $rank\,AB$ 個の線形独立なベクトルが選べる。

（3）　$rank\,AB \leqq rank\,A$　ただし、任意の行列 M に対して、$rank\,{}^tM = rank\,M$ が成り立つことを用いてよい。

Hint：　（2）を用いてよい。（2）は AB の階数は積の右側の行列の階数に等しいか、小さいということを言っている。あとは、${}^t(AB)=$？