2017年度学年末試験問題・基礎数学Ⅰ(C1)

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば
$x^2+2x-3=$ (1) $(x-1)$ となっていたら (1) の正解は $(x+3)$ であり，((1)) $(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) 2点 $A(5, 7)$, $B(-5, -3)$ に対して，次の点の座標を求めよ。

[1] AB を 3:2 の比に内分する点。 [2] AB を 2:3 の比に内分する点。

(2) 次の3点を頂点とする三角形の重心の座標を求めよ。

[1] $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(4, 3)$ [2] $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$

(3) 点 $A(2, -2)$, $B(5, 4)$ があり，三角形 ABC の重心の座標が $(1, 3)$ であるとき，点 C の座標を求めよ。

(4) 次の直線の方程式を求めよ。

[1] 2点 $(1, 2)$, $(-2, 3)$ を通る直線。

[2] 2点 $\left(-\sqrt{2}, 4\right)$, $\left(-\sqrt{2}, -5\right)$ を通る直線。

[3] x 軸との交点が $(-2, 0)$ で，x 軸とのなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ の直線。ただし，傾きは正とする。

[4] 点 $(-1, 2)$ を通り，傾きが 4 の直線。

[5] 点 $(1, 3)$ を通り，直線 $x+2y+3=0$ に平行な直線。

[6] 点 $(4, 3)$ を通り，x 軸に平行な直線。

[7] 2直線 $2x-y+3=0$, $x+y=0$ の交点を通り，直線 $x-y+3=0$ に垂直な直線。

[8] 2点 $(5, 1)$, $(1, 3)$ を結ぶ線分の垂直二等分線。

(5) 3点 $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, 1)$ から等距離にある点の座標を求めよ。

(6) 2直線 $3x+4y-2=0$, $ax+3y+c=0$ (a , c は定数) が一致するとき，a , c の値を求めよ。 [1] a [2] c

(7) 3点 $O(0, 0)$, $A\left(2, 2\sqrt{3}\right)$, $B(x, y)$ を頂点とする三角形が正三角形のとき，B の座標を求めよ。

２．2点 $A(15, 37)$, $B(22, -14)$ に対して，次の点の座標を求めよ。ただし，答のみ。(5点)

(1) AB を 2:5 の比に外分する点。 (2) AB を 3:2 の比に外分する点。

(3) AB を 7:4 の比に外分する点。

３．l は正の傾きをもち，点 $(0, k)$ を通り，y 軸とのなす角が α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の直線とする。

このとき，次の問いに答えよ。ただし，(1)~(3) は答のみ。(16点)

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l' は点 $(0, k')$ を通り l に垂直である。l' の方程式を求めよ。

(3) 次の記述は $k \neq k'$ のとき，l と l' の交点の座標を求める計算である。括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[4] , [5] は1つの三角関数で答えよ。

(ここから) l と l' の方程式を連立させると ([1]) $x=k'-k$ となる。[1] を三角関数の性質を用いて変形すれば [1] $=\dfrac{[\ 2\ ]}{\sin 2\alpha}$ となるので結局 $x=$ [3] となる。これを l の方程式に代入すれば，$y=k'$ [4] $+k$ (1 − [4]) $=k'$ [4] $+k$ [5] となる。(ここまで)

(4) (3) で求めた l と l' の交点と，点 $\left(0,\ \dfrac{k+k'}{2}\right)$ との距離を簡単な式で表せ。

4．点 A(1, 2) と直線 $l:3x+4y-2=0$ について，次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(4点)

(1) A を通り l に垂直な直線 l' の方程式を一般形で求めよ。

(2) l と l' の交点の座標を求めよ。

5．2直線 $l_1: x+(k-6)y+5=0$, $l_2: (k+7)x+2y+6=0$ について，次の問いに答えよ。ただし，(1) ~ (3) は答のみ。(15点)

(1) 直線 l_1, l_2 とも定数 k の値に関係なく，それぞれ定点 A_1, A_2 を通る。

[1] A_1 の座標を求めよ。　　[2] A_2 の座標を求めよ。

(2) 2直線 l_1, l_2 が平行となるときの k の値を求めよ。

(3) 2直線 l_1, l_2 が垂直となるときの k の値を求めよ。

(4) 2直線 l_1, l_2 が垂直となるとき，l_1 と l_2 の交点を B とする。B の座標を求めよ。

(5) 三角形 A_1A_2B の面積 S を求めよ。必要なら $\sqrt{8722}\times\sqrt{1602}=3738=89\times 42$ を用いよ。

6．3点 $A(a, b)$, $B(-c, -b)$, $C(c, -b)$ $(b>0, c>0, a\neq\pm c)$ について，次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(10点)

(1) 線分 AB の垂直二等分線 l_1 の方程式を求める次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) 線分 AB の中点の座標は [1] であり，AB の傾きは [2] だから，l_1 の方程式は [3] $x+4by+$ [4] $=0$ (ここまで)

(2) 線分 AC の垂直二等分線 l_2 の方程式を一般形の形で求めよ。

(3) l_1 と l_2 の交点 D の座標を求めよ。

(4) $a=4$, $b=2$, $c=3$ のとき，D の座標を求めよ。

7．座標平面上の2点 $A(a, c)$, $B(b, d)$ で AB を 5:3 の比に内分する点を $A_1(a_1, c_1)$，A_1B を 3:5 の比に内分する点を $B_1(b_1, d_1)$ とする。さらに $A_2(a_2, c_2)$ は A_1B_1 を 5:3 の比に，$B_2(b_2, d_2)$ は A_2B_1 を 3:5 の比に内分する点とする。これを繰り返し，点の列 $A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots, A_n, B_n, \cdots$ を作っていく。このとき，次の問いに答えよ。なお，$a_0=a$，$b_0=b$ とする。ただし，(1) は答のみ。(18点)

(1) $a_n=pa_{n-1}+qb_{n-1}$，$b_n=sa_{n-1}+tb_{n-1}$ を満たす定数 p, q, s, t の値を求めよ。

[1] p　　[2] q　　[3] s　　[4] t

（2） $a_n-\alpha b_n=r\left(a_{n-1}-\alpha b_{n-1}\right)$ を満たす定数 α，r を求めよ。

（3） （2）の結果を用いて $a_n=Pa+Qb$，$b_n=Sa+Tb$ を満たす P，Q，S，T を求めよ。

８．次の問いに答えよ。ただし，（2）は答のみ。(7点)

（1） ２直線 $l_1: y=m_1x$，$l_2: y=m_2x$ 上のそれぞれの点 $\mathrm{P}\left(1, m_1\right)$，$\mathrm{Q}\left(1, m_2\right)$ と原点 O を頂点とする三角形 OPQ において $\theta=\angle\mathrm{POQ}$ $\left(0\leqq\theta\leqq\pi\right)$ とするとき，$\cos\theta$ を m_1，m_2 の式で表せ。なお，$m_1\neq m_2$ とする。（実は導かれた結果は $m_1=m_2$ でも使える）

（2） ２直線 $y=\dfrac{1}{3}x$，$y=2x$ のなす角 α $\left(0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

補足： ２直線のなす角とは，平行でないとき交点における２直線が作る角のことで，通常は $0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。