2017年度後期中間試験問題・基礎数学Ⅰ（C1）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=$ (1) $(x-1)$ となっていたら (1) の正解は $(x+3)$ であり，((1)) $(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） a, b, c, d がすべて正の実数のとき次の不等式で等号が成り立つ場合を答えよ。

［1］ $(ab+cd)(ac+bd) \geqq 4abcd$　　［2］ $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$

（2） $U=\{x \in \mathrm{N} \mid x \leqq 10\}$ を全体集合とするとき
$A=\{x \mid x \text{は偶数}\}, B=\{x \mid x^2-12x+32 \leqq 0\}, C=\{3, 4, 5, 7, 8\}$ に対して，次の各集合を求め，要素を列挙する形で答えよ。

［1］ $A \cap B$　［2］ $A \cup B$　［3］ $\overline{A} \cup \overline{B}$　［4］ $\overline{A} \cap \overline{B}$　［5］ $A-B$
［6］ $B-A$　［7］ $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$　［8］ $\overline{A \cap B} \cup \overline{C}$

（3） $U=\{x \in \mathrm{N} \mid x \leqq 250\}$ を全体集合とし，$A=\{x \mid x \text{は2の倍数}\}, B=\{x \mid x \text{は3の倍数}\}$, $C=\{x \mid x \text{は5の倍数}\}$ とするとき，次の値を求めよ。

［1］ $n(A)$　［2］ $n(B)$　［3］ $n(C)$　［4］ $n(A \cap B)$　［5］ $n(B \cap C)$
［6］ $n(C \cap A)$　［7］ $n(A \cap B \cap C)$　［8］ $n(A \cup B \cup C)$

２．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 次の文章の $\boxed{}$ の中に，必要，十分，必要十分のいずれかを書き入れよ。ただし，文字はすべて実数とする。なお，この問題は無解答なら 0 点であるが，誤答は -1 点とする。

［1］ $x=3$ は，$x^2=9$ のための $\boxed{}$ 条件である。

［2］ $x^2=0$ は，$x=0$ のための $\boxed{}$ 条件である。

［3］ $x^2+y^2=0$ は，$x=y=0$ のための $\boxed{}$ 条件である。

［4］ $xy=0$ は，$x=y=0$ のための $\boxed{}$ 条件である。

［5］ $2x+y=5$ は，$x=2$ かつ $y=1$ のための $\boxed{}$ 条件である。

［6］ $x^2=1$ は，$x=1$ のための $\boxed{}$ 条件である。

［7］ $a=b=2$ は，$ab=4$ のための $\boxed{}$ 条件である。

（2） 命題「$x>0$ かつ $y>0 \rightarrow x+y>0$」について，次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，［ 2 ］,［ 4 ］,［ 6 ］は真か偽と答え，これらは無解答なら 0 点である

が，誤答は－1点とする。

注意：命題の否定に「～でない」という表現を用いた解答には点を与えない。

例「$x>0$ かつ $y>0$」の否定を「$x>0$ かつ $y>0$ でない」としたら不可。

(ここから) 問題の命題の対偶は [1] であり，対偶の真偽は [2] である。また問題の命題の裏は [3] であり，裏の真偽は [4] である。最後に問題の命題の逆は [5] であり，逆の真偽は [6] である。(ここまで)

(3) 連立不等式 $\begin{cases} 2x+7>5x-2 \\ 3x+1>4x \end{cases}$ を解け。

(4) 次の不等式を解け。

[1] $\dfrac{5x-2}{3} \geqq \dfrac{7}{2}x-1$　[2] $(x+1)(x+3)(x-2) \leqq 0$　[3] $x^2-x-2<0$

[4] $x^2-(p+1)x+p \geqq 0$，ただし $p<1$　[5] $3x^2-2x+1<0$

(5) x の2次方程式 $mx^2-4x+3m=0$ が2つの異なる実数解をもつように，定数 m の値の範囲を求めよ。

3．x, y, z をいずれも正の実数とするとき，次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[　] に数値，(　) に文字式，等式が入る。ただし，答のみ。(15点)

注意：[10]，[14] は指数部の値を答える。

(ここから) $x^3+y^3+z^3-3xyz \geqq 0$ を証明する。

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3+z^3-((\ 1\ ))-3xyz$ … ①，

ここで $(x+y)^3+z^3=(x+y+z)((\ 2\ ))$，$(\ 1\ )+3xyz=(\ 3\ )(x+y+z)$

これらを①に代入すれば $(x+y)^3+z^3-((\ 1\ ))-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-((\ 4\ ))\right)$

さらに $x^2+y^2+z^2-((\ 4\ ))=[\ 5\ ]\left((x-y)^2+(y-z)^2+((\ 6\ ))^2\right)$ であるから，結局

$x^3+y^3+z^3-3xyz=[\ 5\ ](x+y+z)\left((x-y)^2+(y-z)^2+((\ 6\ ))^2\right) \geqq 0$

$\therefore x^3+y^3+z^3-3xyz \geqq 0$ （等号成立は (7) のときに限る）… ②

$a=x^3, b=y^3, c=z^3$ と置くと②から $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq (\ 8\ )$ … ③

さて，3辺の長さが a, b, c (いずれも正の実数) の三角形の周の長さを L，面積を S とする。

三角形の面積を求めるHeronの公式から $S=\sqrt{\dfrac{L}{2}(\ 9\ )}$ … ④であり，③を用いると

$$\sqrt{(\ 9\ )}=\left(\sqrt[3]{(\ 9\ )}\right)^{[\ 10\ ]} \leqq \left(\frac{[\ 10\ ]L-((\ 11\ ))}{3}\right)^{[\ 10\ ]}=\frac{L^{[\ 10\ ]}}{[\ 12\ ]}$$

$\therefore \sqrt{(\ 9\ )} \leqq \dfrac{L^{[\ 10\ ]}}{[\ 12\ ]}$ （等号成立は $a=b=c$ のときに限る）… ⑤

④，⑤から $S \leqq [\ 13\ ]L^{[\ 14\ ]}$ となる。(ここまで)

4．不等式 $\dfrac{4}{x+2} \geqq \dfrac{1}{x+6}$ を解け。(6点)

５．連立不等式 $\begin{cases} 4(x-1) > 3(x-2) \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$ を解け。(4点)

６．次の命題を証明せよ。なお（1）は対偶を証明し，（2）は背理法で証明せよ。指示に従わない証明には点を与えない。(14点)

（1） $n \in \mathbb{Z}$ のとき，n^3 が３の倍数ならば，n は３の倍数である。

（2） $\sqrt[3]{3}$ は無理数である。

７．不等式 $|x-1|+|x-6|>7$ … ① の解法に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし, 答のみ。(11点)

(ここから) $|x-1| = \begin{cases} (\ 1\ ) & (x \geqq 1) \\ (\ 2\ ) & (x < 1) \end{cases}$，$|x-6| = \begin{cases} (\ 3\ ) & (x \geqq 6) \\ (\ 4\ ) & (x < 6) \end{cases}$ であるから

$|x-1|+|x-6| = \begin{cases} (\ 5\ ) & (x \geqq 6) \\ (\ 6\ ) & (1 \leqq x < 6) \\ (\ 7\ ) & (x < 1) \end{cases}$ となるので①の解は

$x \geqq 6$ のとき（ 8 ），$1 \leqq x < 6$ のとき（ 9 ），$x < 1$ のとき（ 10 ）となるので結局（ 11 ）となる。(ここまで)