

2013年度後期中間試験問題・数学B(1-3)

1. つぎの方程式を解け。ただし、未知数 x は実数とする。

$$(1) \frac{x-4}{x^2+x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-6}{x^2-4} \quad (2) \sqrt{3x-5} = 2x-10$$

$$(3) |x^2-x-2| = x-1$$

2. 次の文章の括弧に入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。なお、[] には文字式、() には数値が入る。[1] は展開し降べきの順に並べよ。

$x^3+2x^2-3x+4=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ が x の恒等式になるように定数 a, b, c, d の値を定める。 $u=x-1$ とおけば、 $x=u+1$ だから、これを恒等式の左辺に代入すると $x^3+2x^2-3x+4=[1]$ このとき右辺は au^3+bu^2+cu+d となり、 u の恒等式だから、 $a=(2), b=(3), c=(4), d=(5)$ となる。

3. $\frac{3x^2-5x+4}{(x-1)^3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3}$ が恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ。

4. $a:b=c:d$ のとき、 $\frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{cd}{c^2+d^2}$ が成り立つことを証明するつぎの文章の括弧に入るも

っとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。なお、 $a^2+b^2>0, c^2+d^2>0$ とする。

$a:b=c:d$ より $ad=(1) \dots \textcircled{1}$

$$\frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{cd}{c^2+d^2} = \frac{((2))(ad-bc)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \quad \textcircled{1} \text{から、与式}=0 \quad \therefore \frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{cd}{c^2+d^2}$$

5. つぎの不等式を解け。(3) は連立不等式。ただし、答のみ。

$$(1) 4x+3<11 \quad (2) 4x+3x^2 \leq 0 \quad (3) \begin{cases} \frac{x+1}{2} \geq \frac{x-1}{3} \\ \frac{x-3}{2} + \frac{4+x}{3} \geq x \end{cases}$$

6. 不等式 $x^3-2x^2-5x+6 \geq 0$ を解け。

7. つぎの不等式を証明せよ。また等号が成り立つのはどのような場合か。

$$(1) a^2+b^2 \geq 2(a-b-1) \quad (2) a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

8. 全体集合をすべての実数とする。 $A=\{x \mid 0 < x < 3\}, B=\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ とする。このとき、つぎの集合を求めよ。ただし、答のみ。なお解答は $\{x \mid C(x)\}$: $C(x)$ は条件の形で答えよ。また、空集合は ϕ , 全体集合は U と表せ。

- (1) $A \cap B$ (2) $A \cup B$ (3) \bar{A} (4) \bar{B} (5) $\bar{A} \cup \bar{B}$ (6) $\bar{A} \cap \bar{B}$
 (7) $A \cap \bar{B}$ (8) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ (9) $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B})$

9. a, b, c が正の数 のとき、 $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc$ を証明する。つぎの問いに答えよ。なお、等号が成り立つ場合を明記しなくてよい。

- (1) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ を証明せよ。
 (2) $a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解を用いて、問題の不等式を証明せよ。

10. つぎの文章は、 x の分数方程式 $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{x^2-2a-a^2}{x^2-a^2}$ (a は定数) を解く過程を示したものである。括弧に入るもっとも適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、答のみ。なお、[] には文字式、() には数値、< > には条件式が入る。

方程式の両辺に x^2-a^2 をかけて整理すると、[1] = 0 なる x の 2 次方程式がでてくる。これを解くと、 $x = [2]$ という解がでてくる。なお、 $x = [3]$ は明らかに無縁解である。ところが、 $a = (4)$ のとき、[2] も無縁解になってしまう。まとめると < 5 > のとき解なし、< 6 > のとき $x = [2]$ が解となる。

11. 集合 A の要素の個数を記号で $n(A)$ と表す。ただし、要素の個数は有限個とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 2 つの集合 A, B について、 $n(A), n(B), n(A \cup B), n(A \cap B)$ の 4 つの間の関係式をかけ。ただし、答のみ。($n(A \cup B) = \dots$ という形で答えよ)
 (2) $n(A) = 19, n(B) = 24, n(\bar{A} \cap \bar{B}) = 3, n(U) = 40$ とする。 U は全体集合。このとき、 $n(A \cap B)$ の値を求めよ。
 (3) (2) と同じ条件で、 $n(A \cap \bar{B})$ の値を求めよ。

12. 連立不等式 $\begin{cases} 2x^2 \leq 4x + 5 \\ 3x^2 - 7x - 10 < 0 \end{cases}$ を解け。