2018年度学年末試験問題・微分積分Ⅱ（MS2）[redacted]

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら $(\ 1\ )$ の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。また，例えば計算すると $\dfrac{1}{2}$ となるものを約分しないで $\dfrac{2}{4}$ と答えることは最も適切な答えとは言えない。

注意： $\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。$\exp x=e^x$ である。自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ と表す。

注意： 特に断らない限り $y=y(x)$ であり $\dfrac{dy}{dx}$ を y' と表すことがある。また，C は任意定数である。

1．$I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^5}}$ の計算の次の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[　] は数値が入る。ただし，答のみ。(12点)

(ここから) $I=\displaystyle\int x^{[\ 1\ ]}\left(x^2+1\right)^{[\ 2\ ]}dx$ だから $\dfrac{[\ 1\ ]+1}{2}+[\ 2\ ]=[\ 3\ ]$ $\therefore$ $t=\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{1/4}$ と置換する。このとき $dt=-\dfrac{1}{2}x^{[\ 4\ ]}\left(x^2+1\right)^{[\ 5\ ]}dx$ だから

$\dfrac{x^{[\ 1\ ]}\left(x^2+1\right)^{[\ 2\ ]}}{x^{[\ 4\ ]}\left(x^2+1\right)^{[\ 5\ ]}}=x^{[\ 6\ ]}\left(x^2+1\right)^{[\ 7\ ]}=t^{[\ 8\ ]}$ となる。$\therefore$ $I=\displaystyle\int(\ 9\ )dt=(\ 10\ )$ で，これは t のみの式だから x のみの式に戻せば $I=(\ 11\ )$ と求まる。 (ここまで)

2．微分方程式 $y'+y\cos x=\cos x\sin x$ … ① の解法に関する次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(7点)

(ここから) $y'+y\cos x=0$ を解くと $y=C(\ 1\ )$ となる。$u=u(x)$ として $y=u(\ 1\ )$ を①に代入して計算を進めると $u'=(\ 2\ )$ となるから $u=\displaystyle\int(\ 2\ )dx+C$，$t=\sin x$ と置換すれば

$\displaystyle\int(\ 2\ )dx=\int(\ 3\ )dt=(\ 4\ )$ と t のみの式がでるのでこれを x のみの式に戻せば $u=(\ 5\ )+C$ となる。従って①の解は $y=(\ 6\ )$ (ここまで)

3．微分方程式 $y'=\dfrac{2x-6y+7}{x-3y+4}$ を解け。（Hint：$u=x-3y$ と置き u の微分方程式を導く）(6点)

4．次の不定積分を求めよ。なお，積分定数は省略してよい。ただし，答のみ。(25点)

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^{-1}dx$　　(3) $\displaystyle\int e^x dx$　　(4) $\displaystyle\int\sin x\,dx$

[redacted]

(5) $\int \cos x\,dx$　(6) $\int \sec^2 x\,dx$　(7) $\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx$　(8) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$

(9) $\int \dfrac{dx}{4+x^2}$　(10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$　(11) $\int \exp(-6x)\sin 3x\,dx$

(12) $\int \sqrt{6-x^2}\,dx$　(13) $\int \dfrac{dx}{x^2-4}$　(14) $\int \sqrt{x^2-6}\,dx$

5. $I_n=\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$ $(n\in\mathbb{N})$ について，次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(8点)

(金沢大 改)

(1) I_1 の値を求めよ。

(2) I_n を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx=[\ 1\ ]$ だから $n\geqq 2$ のとき

$$I_n=\int_0^\infty x^{2n-2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx=\Big[[\ 1\ ]x^{2n-2}\Big]_0^\infty+\int_0^\infty[\ 2\ ]dx=[\ 3\ ]I_{n-1}$$

この漸化式を繰り返し用いれば $I_n=[\ 4\ ]I_1$，これと上の結果から $I_n=[\ 5\ ]$ (ここまで)

6. $I_{2,4}=\displaystyle\int \cos^2 x\sin^4 x\,dx$ を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

なお，[　] は数値が入る。ただし，答のみ。(17点)

(ここから) $\displaystyle\int \cos x\sin^4 x\,dx=(\ 1\ )$ だから，部分積分法を用いると

$$I_{2,4}=(\ 1\ )\cos x+[\ 2\ ]\int \sin^{[\ 3\ ]}x\,dx=(\ 1\ )\cos x+[\ 2\ ]\int(\ 4\ )dx-[\ 2\ ]I_{2,4}$$

$\therefore I_{2,4}=(\ 5\ )+[\ 6\ ]\displaystyle\int(\ 4\ )dx$ … ①，ここで再び部分積分法を用いると

$$\int(\ 4\ )dx=-(\ 7\ )\cos x+[\ 8\ ]\int(\ 9\ )dx-[\ 8\ ]\int(\ 4\ )dx$$

$\therefore \displaystyle\int(\ 4\ )dx=(\ 10\ )+[\ 11\ ]\int(\ 9\ )dx$ … ②，また $\displaystyle\int(\ 9\ )dx=(\ 12\ )$ と簡単に求まる

ので，これを②に代入して $\displaystyle\int(\ 4\ )dx$ を求め最終的にこれを①に代入すれば

$I_{2,4}=\dfrac{\sin x\cos x}{48}((\ 13\ ))+[\ 14\ ]x$ と求めることができた。(ここまで)

7. 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^3 \frac{\sqrt{1+x^3}}{(3-x)^2}\,dx$ の収束，発散を判定せよ。(3点)

8. $I=\int_{0}^{p/4}\log(1+\tan x)\,dx$ を求めよ。 $\left(\text{Hint}:\ x=\dfrac{p}{4}-t\ \text{と置換する}\right)$ (6点)

9. Euler の Beta 関数 $B(p,q)=\int_{0}^{1}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\ \ (p,q>0)$ … ① に関する次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[　] は数値が入る。ただし，答のみ。(11点)

(ここから) $x=\dfrac{1}{t+1}$ と置換すれば $dx=(\ 1\ )dt$, $\lim\limits_{x\to+0}t=(\ 2\ )$, $1-x=(\ 3\ )$ となるので

$$B(p,q)=\int_{(2)}^{0}\frac{1}{(t+1)^{p-1}}\cdot((\ 3\ ))^{q-1}\cdot((\ 1\ ))dt=\int_{0}^{(2)}\frac{t^{(5)}}{(t+1)^{(4)}}dt\ \text{となる。}$$

再び①の広義積分において $x=\cos^2 q\ \ (0\leqq q\leqq p/2)$ と置換すれば $dx=(\ 6\ )dq$,
$\lim\limits_{x\to+0}q=[\ 7\ ]$, $\lim\limits_{x\to1-0}q=[\ 8\ ]$ となるので

$$B(p,q)=\int_{[7]}^{[8]}\left(\cos^2 q\right)^{p-1}\left(1-\cos^2 q\right)^{q-1}\cdot((\ 6\ ))dq$$

$$=[\ 9\ ]\int_{[8]}^{[7]}(\cos q)^{(10)}(\sin q)^{(11)}dq\ \text{となる。}$$ (ここまで)

10. $I=\int\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$ を求めよ。(5点)