2018年度後期中間試験問題・微分積分Ⅱ（MS2）2018年11月29日

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば
$x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら（ 1 ）の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

注意： $\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。$\exp x=e^x$ である。自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ と表す。

１．次の定積分の値を求めよ。ただし，答のみ。(11点)

（1） $\displaystyle\int_0^{3/2}\sqrt{9-x^2}\,dx$　（2） $\displaystyle\int_{-1}^{0}\sqrt{1-2x-x^2}\,dx$　（3） $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\cos^8 2x\,dx$

（4） $\displaystyle\int_0^{1}x\left(1-x^2\right)^4dx$　（5） $\displaystyle\int_{\exp 1}^{\exp 3}\frac{dx}{x\log 2x}$ （答に e を用いるな）

（6） $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^4 x\sin^2 x\,dx$

２．次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，［　］は数値が入る。ただし，答のみ。(4点)

(ここから) $f(x)=\dfrac{x^2+5x-2}{x^2(x-2)}$ と置く。$f(x)$ を部分分数に分解すると

$f(x)=\dfrac{[\ 1\ ]}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{[\ 2\ ]}{x-2}$ となるから $\displaystyle\int f(x)\,dx=(\ 3\ )$ (ここまで)

３．次の不定積分を求めよ。なお，積分定数は省略してもよい。ただし，答のみ。(10点)

（1） $\displaystyle\int\frac{e^x-1}{e^x-x+1}\,dx$　（2） $\displaystyle\int\tan(2x-1)\,dx$　（3） $\displaystyle\int\sin x\sqrt[3]{\cos x+2}\,dx$

（4） $\displaystyle\int\log(x+2)\,dx$　（5） $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

４．曲線 $y=2\cosh\dfrac{x}{2}$ $\left(0\leqq x\leqq 4\right)$ の長さ l を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，［　］は数値が入る。ただし，答のみ。(4点)

(ここから) $y'=(\ 1\ )$ より $1+(y')^2=1+((\ 1\ ))^2=(\ 2\ )$　$\therefore\ \sqrt{(\ 2\ )}=(\ 3\ )$ 以上より

$l=\displaystyle\int_0^4(\ 3\ )\,dx=[\ 4\ ]$ (ここまで)

５．次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(21点)

（1） 曲線 $x=e^t,\ y=e^{2t}+1$ $\left(0\leqq t\leqq 1\right)$ と x 軸および 2 直線 $x=1,\ x=e$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

（2） 曲線 $C:\ y=\log x$ について，次の問いに答えよ。

［1］ C と２直線 $y=2$, $x=1$ で囲まれた図形を D とする。D の面積 S を求めよ。

［2］ 上の D を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

（3） 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $n \in \mathrm{N}$ に対し $I_n=\int (\log x)^n\,dx$ (積分定数は省略) と置く。$I_1=$［ 1 ］であり，I_n に部分積分法を用いると $I_n=$［ 2 ］－［ 3 ］I_{n-1} となる。これより I_2 を求めると［ 4 ］，I_3 を求めると［ 5 ］となる。(ここまで)

（4） ２曲線 $y_1=x^2-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$, $y_2=-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ で囲まれた図形の面積 S を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，［ 3 ］は絶対値を取った x の式を答えよ。また，［ 5 ］は［ 4 ］が正解でないと点を与えない。

(ここから) この２曲線の交点の x 座標を求めると $x=$［ 1 ］,［ 2 ］（［ 1 ］<［ 2 ］）となる。

$\therefore S=\int_{[1]}^{[2]} |y_1-y_2|\,dx=\int_{[1]}^{[2]}([\ 3\ ])\,dx=[[\ 4\ ]]_{[1]}^{[2]}=[\ 5\ ]$ (ここまで)

（5） 曲線 $x=\sqrt{t}$, $y=\sqrt{t}-t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

６．極座標による方程式 $r=\dfrac{4}{1-\cos\theta}$ $(0<\theta<2\pi)$ で表される曲線 C について，次の問いに答えよ。(12点)

（1） C の直交座標 (x, y) による方程式を求めよ。

（2） C と２つの半直線 $\theta=\tan^{-1}2\sqrt{2}$, $\theta=\pi$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

７．$I=\int\dfrac{dx}{(x^2+9)^2}$ を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，積分定数は省略してある。ただし，答のみ。(13点)

(ここから) $x=3\tan\theta$ $(|\theta|<\pi/2)$ と置換すると $dx=(\ 1\ )\,d\theta$, $x^2+9=9(\tan^2\theta+1)$

$=9((\ 2\ ))^2$ だから $I=\dfrac{1}{27}\int(\ 3\ )\,d\theta=\dfrac{1}{54}\int(1+(\ 4\ ))\,d\theta=(\ 5\ )$ となる。（ 5 ）を x の式に戻すと $I=\dfrac{1}{54}((\ 6\ ))$ となり I が求まった。また次のような計算もある。

$$J=\int\frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx=\int x\cdot\frac{x}{(x^2+9)^2}\,dx=(\ 7\ )+\frac{1}{2}\int(\ 8\ )\,dx=(\ 9\ )$$ (部分積分法)

$$\therefore I=\frac{1}{9}\int\frac{x^2+9-x^2}{(x^2+9)^2}\,dx=\frac{1}{9}\left(\int\frac{dx}{x^2+9}-J\right)=\frac{1}{9}((\ 10\ )-J)=\frac{1}{54}((\ 6\ ))$$ (ここまで)

８．次の不定積分を求めよ。なお，積分定数は省略してよい。ただし，（1）は答のみ。(9点)

（1） $\int\cos^{-1}x\,dx$　　（2） $\int(\cos^{-1}x)^2\,dx$

9．定積分を利用して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(3n)!}{(2n)!}\right)^{1/n}$ の値を求めよ。(9点)　(筑波大 改)

10．アステロイド (astarloid) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ $(a>0:$定数$)$ は単純閉曲線であり, 媒介変数表示は $x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin^3\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ となる。アステロイドで囲まれた領域の面積 S を求めよ。(7点)

astarloid