2018年度前期末試験問題・微分積分Ⅰ（MS2）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら（ １ ）の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは０点とする。

注意： $\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。

１．次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 次の極限値を求めよ。

［1］ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{x}$ ［2］ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{x-\sin 2x}$ ［3］ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x^2}$

［4］ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-3x+1}{-x^3-2x^2+4}$ ［5］ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^4}$

（2） 関数 $y=x^3-6x^2+a$ （a：定数）について

［1］ 増減表を書け。

［2］ 極大値と極小値がともに正となるように，定数 a の値の範囲を求めよ。

（3） 関数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$ に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $y'=[\ 1\ ]$ より $y'=0$ となる x の値を $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で求めれば $x=[\ 2\ ]$ となる。

増減表

x	0	…	[2]	…	π
y'		[3]	0	[4]	
y	1	[5]	[6]	[7]	-1

から $x=[\ 8\ ]$ で最大値 [9]，$x=[\ 10\ ]$ で最小値 [11] をとる。(ここまで)

２．次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 媒介変数 t によって表される曲線 $x=4\cos 2t$, $y=3\sin 2t$ $(0\leqq t<\pi)$ について，次の問いに答えよ。

［1］ t を消去した x, y の方程式を求めよ。

［2］ y を x の関数とみて $\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表せ。$(t\neq 0,\ \pi/2)$

［3］ y を x の関数とみて $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の式で表せ。$(t\neq 0,\ \pi/2)$

［4］ この曲線の $t=\pi/8$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

（2） x 軸上の動点 P は原点を出発してから t 秒後の x 座標が $x=t^3-6t^2+9t$ である。このとき，次の問いに答えよ。

［1］ 点 P の速度を求めよ。 ［2］ 点 P の加速度を求めよ。 ［3］ 点 P の速さを求めよ。

［4］ 点 P は運動の向きを２度変える。それは何秒後と何秒後か。

（3） 曲線 $y=\sin 2x-2\sin x+x$ $(0<x<\pi)$ について，次の問いに答えよ。

［1］ $y''=0$ を満たす x を求めよ。　［2］ 変曲点の座標を求めよ。

（4） 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

［1］ $y=\dfrac{1}{1+x}$　［2］ $y=\dfrac{1}{e^{x-1}}$

（5） $y=x^2e^{2x}$ の第５次導関数を求めよ。

3．次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，［　］は数値が入る。ただし，答のみ。(12点)

(ここから) $y=\sqrt{1+x}$ のとき $y'=(\ 1\ )$ より $(1+x)y'=[\ 2\ ]y$ … ① となる。①の両辺を n 回微分すると①の左辺は $(1+x)y^{(n+1)}+(\ 3\ )y^{(n)}$ となり①の右辺は $[\ 2\ ]y^{(n)}$ となるから

$2(1+x)y^{(n+1)}+((\ 4\ ))y^{(n)}=0$ … ② となる。②で $x=0$ を代入し，$a_n=y^{(n)}(0)$ と表せば

$a_{n+1}=(\ 5\ )a_n$ … ③ となる。これを用いると

$a_n=(\ 6\ )a_{n-1}=(\ 7\ )a_{n-2}=\cdots=(-1)^{n-1}(\ 8\ )a_1=(-1)^{n-1}(\ 9\ )$ $\left(\because a_1=[\ 2\ ]\right)$

$\therefore a_n=(-1)^{n-1}(\ 9\ )=\dfrac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{(10)}((\ 11\ ))!}$ (ここまで)

4．関数 $y=\dfrac{x^3}{x^2+4x+4}$ について，次の問いに答えよ。(13点)

（1） y' を求めよ。　（2） 増減表を書き，極値を求めよ。

（3） この関数のグラフの漸近線の方程式を求めよ。

5．次の問いに答えよ。(25点)

（1） $f''(a)$ が存在すれば $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a)$ が成り立つことを Cauchy の平均値の定理を用いて証明せよ。

(ヒント) $f''(a)$ が存在するから点 a の近傍で $f'(x)$ が存在する。$G(x)=x^2$，

$F(x)=f(a+x)-2f(a)+f(a-x)$ とすればこの２つの関数は点０の近傍で微分可能になる。

（2） $f(x)=(x-a)|x-a|$ のとき

［1］ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$ を求めよ。　［2］ $f'(x)$ を求めよ。

［3］ $f''(a)$ は存在するか調べよ。

参考：（1）の左辺の極限値をSchwarzの第２次微分係数という。Schwarzの第２次微分係数が存在しても $f''(a)$ が存在するとは限らないことが知られている。