2018年度前期中間試験問題・微分積分Ｉ（MS2）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば
$x^2+2x-3=$（ 1 ）$(x-1)$ となっていたら（ 1 ）の正解は $(x+3)$ であり，((１))$(x-1)$
となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

注意： $\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。

１．次の関数を微分せよ。なお，解答には $y'=$ と書かなくてもよい。また，１つの式にまとめたり，因数分解するなどして簡単な形で答えよ。ただし，答のみ。(50点)

(1) $y=\log\dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)}$ $(x>1)$　(2) $y=\log\left(\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt{x^3}\right)$　(3) $y=x^{\pi}$ $(x>0)$

(4) $y=\log\left|e^x-2\right|$　(5) $y=\left(\log_2 x\right)^2$　(6) $y=\log_3\left((x-4)\sqrt{x^2+3}\right)$

(7) $y=x\cos^{-1}x$　(8) $y=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$　(9) $y=\cos x^2$

(10) $y=\tan^{-1}\left(-\sqrt{x}\right)$　(11) $y=\sqrt[4]{x^3+6x-7}$　(12) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}$

(13) $y=\cot x$　(14) $y=\sqrt{1+\sin x}$　(15) $y=\sin^3(2x+1)$

(16) $y=x^4-2x^3+x$　(17) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$　(18) $y=(x+1)(x-1)$

(19) $y=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$　(20) $y=\dfrac{x+3}{2x+1}$　(21) $y=\dfrac{3x-1}{x^2-5}$

(22) $y=\left(1-x^2\right)(2x-3)(x+2)$　(23) $y=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{4}{5}$

(24) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{4}{x^4}$　(25) $y=\dfrac{x^{-2}}{4}+\dfrac{5}{6x^3}$　(26) $y=x^{4/5}+x^{-1/4}$

(27) $y=\sqrt[6]{x}+\sqrt[4]{x^5}$　(28) $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$　(29) $y=(2x-1)\sqrt{x}$

(30) $y=\sin(2-3x)$　(31) $y=\dfrac{\sin(2x-3)}{4}$　(32) $y=\sin 4x\cos 5x$

(33) $y=\left(x^2-x+1\right)e^x$　(34) $y=e^x\tan x$　(35) $y=\dfrac{3}{e^{2x}}$　(36) $y=5^x$

２．$f(x)$ は点 a で微分可能な関数とする。このとき，次の極限値を a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表せ。ただし，（1）は答のみ。(10点)

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{af(a+h)-(a+h)f(a)}{h}$　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2f(a+h)-a^2f(a)}{h}$

（3） $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)\cos a - f(a)\cos x}{x-a}$

3．次の極限値を求めよ。ただし，答のみ。(4点)

（1） $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x-1}-1}$　　（2） $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{5x-2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ $(x \to -\infty)$

4．次の関数を微分せよ。ただし，（1）~（3）は答のみ。(11点)

（1） $y=e^{-3x}(\cos 3x - \sin 3x)$　　（2） $y=x^2\sin(2x+1)\cos(x-2)$

（3） $y=\log\dfrac{|3x+1|}{x^2+1}$ (1つの式にまとめよ)　　（4） $y=\tan^{-1}x+\dfrac{1}{\tan^{-1}\dfrac{1}{x}}$

5．次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(18点)

(ここから) $\cos\left(\cos^{-1}x\right)$ を簡単な式で表す。$y=\cos^{-1}x$ と置くと，$0 \leqq y \leqq$（ 1 ）であり $\cos y=$（ 2 ）だから $\cos\left(\cos^{-1}x\right)=$（ 3 ）である。一方，$\cos^{-1}(\cos x)=$（ 3 ）は正しくない。反例として $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}\right)=\cos^{-1}$(（ 4 ）)$=\pi-\cos^{-1}$（ 5 ）=（ 6 ）

$\therefore\ \dfrac{5\pi}{4} \neq$（ 6 ）などが挙げられる。

$y=f(x)=\sec x\left(=\dfrac{1}{\cos x}\right)$ を定義域：$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2} < x \leqq \pi$，値域：（ 7 ）$\geqq 1$ で考えれば逆関数が存在し，それを $y=\sec^{-1}x$ と表す。逆関数の定義域は（ 8 ），値域は

$0 \leqq y < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2} < y \leqq \pi$ … ① である。値をいくつか求めると，$\sec^{-1}\sqrt{2}=$（ 9 ），

$\sec^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}}=$（ 10 ），$\sec^{-1}(-2)=$（ 11 ）などである。最後に $\sec^{-1}x$ の導関数を求める。

$y=\sec^{-1}x$ と置くと $x=$（ 12 ）だから，逆関数の微分法より

$\left(\sec^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{(\ 12\ )'}=\dfrac{1}{\sec y\cdot(\ 13\ )}$，①より（ 13 ）を x のみの式で表せば

$(\ 13\ )=\begin{cases}(\ 14\) & (x \geqq 1)\\ -(\ 14\) & ((\ 15\ ))\end{cases}$，絶対値を用いるとこの２つをまとめて表せるので結局

$\left(\sec^{-1}x\right)'=$（ 16 ）となる。(ここまで)

6．$y=\sinh x=\dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$ $(-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty)$ は逆関数が存在することが知られている。これを $y=\sinh^{-1}x$ （arc hyperbolic sine）とするとき，この逆関数の導関数を，逆関数の微分法を用いて求めよ。(7点)　(筑波大 改)