2015年度学年末試験問題・数学AⅡ（MC3）

特にことわらない限り $y=y(x)$ である。

１．$y''+3y'-4y=e^x$ … ① について，次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (16点)

（1） $y''+3y'-4y=0$ … ② の１組の基本解を求めよ。

（2） ①の１つの特殊解を演算子を用いて求めた以下の計算の［　　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。(［ 3 ］~［ 5 ］: 計算途中の答えには点を与えない)

１つの特殊解を η とすれば $\eta=\dfrac{1}{[\ 1\ ]}\left(e^x\right)=\dfrac{1}{D-1}\left\{\dfrac{1}{D+[\ 2\ ]}\left(e^x\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{D-1}\left([\ 3\ ]e^x\right)=e^x\dfrac{1}{[\ 4\ ]}([\ 3\ ])=[\ 5\ ]e^x$

（3） ①の一般解を求めよ。

（4） （1）で求めた基本解で減少関数を y_1，増加関数を y_2 とするとき

［1］ $W=W\left(y_1, y_2\right)$ (*Wronskian*) を求めよ。

［2］ $u=u(x)$ とし $y=u\,y_1$ と置くとき，この y が②の解となるような u を求めよ。ただし，任意定数は省略する。

［3］ $u_1=u_1(x)$，$u_2=u_2(x)$ とし $y=u_1y_1+u_2y_2$ と置くとき，この y が①の１つの特殊解となるような u_1, u_2 を求めよ。ただし，これらは $y_1u_1{}'+y_2u_2{}'=0$ を満たすものとし，任意定数は省略する。(u_1, u_2 の解答欄はそれぞれ１(4)［3-1］,［3-2］とする)

- 減少関数：*decreasing functoin*　　• 増加関数：*increasing functoin*

２．$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ とするとき，連立線形微分方程式

$\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx}=A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}$ … ① について，次の各問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (14点)

（1） A の固有値を求めよ。(虚数解まで考える)

（2） A を対角化する行列 P を求めよ。ただし，P の１行目の行ベクトルを $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし，１列目に $\boxed{\text{虚部が負となる固有値}}$ に対する固有ベクトルを配置したものを答えよ。

（3） P^{-1} を求めよ。

（4） $\boldsymbol{y}=P\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ としこれを①に代入して出てくる z_1, z_2 の微分方程式を解き，z_1, z_2 を求めよ。ただし，$\boxed{\text{指数関数を用いた式で答えよ。}}$

(z_1, z_2 の解答欄はそれぞれ２(4)［1］,［2］とする)

（5） y_1, y_2 を求めよ。ただし，$\boxed{\text{三角関数を用いた式で答えよ。}}$

(y_1, y_2 の解答欄はそれぞれ２(5)［1］,［2］とする)

3．$y=xp+\sqrt{3p^2+2}$　$(p=y')$ … ① について，次の各問いに答えよ。(9点)

（1）①の一般解を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$（任意定数を C とせよ）

（2）①の特異解を求めよ。(パラメーターを消去した形の式)

4．$x^2y''+4xy'+2y=\dfrac{1}{x}$　$(x>0)$ を解け。(12点)

5．$y''-\dfrac{2}{x}y'+\dfrac{x^2+2}{x^2}y=xe^x$　$(x>0)$ … ① について，次の各問いに答えよ。(10点)

（1）$u=u(x)$ とし $y=xu$ とおくとき，この y が①の解となるための u の微分方程式を導け。
(導くだけでここではまだ解かないこと。また導く過程を書いていない解答には点を与えない。)

（2）（1）で導いた u の微分方程式を解き，①の一般解を求めよ。

6．$\left(e^y-y^2\right)dx+\left(xe^y-2xy+2y\right)dy=0$ … ① の解法に関する次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (8点)

$P=e^y-y^2$，$Q=xe^y-2xy+2y$ と表せば $P_y=Q_x=$（１）となるから①は完全微分方程式である。$u=u(x,y)$ として $u_x=P$ … ②　$u_y=Q$ … ③ を満たす u を求める。②を解いて $u=$（２），これを③に代入して $g'(y)=$（３）が導かれ，これより $g(y)=$（４）となる。
（（４）は任意定数省略）以上より①の一般解は（５）（C：任意定数）となる。

7．$y''+2y'\cot x+3y=0$　$(0<x<\pi)$ … ① について，次の各問いに答えよ。(15点)

（1）①の０でない１つの解 y_1 を視察で求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

（2）y_1 と線形独立な①のもう１つの解 y_2 を求めよ。なお，y_1 から y_2 を求める公式を用いてよい。(結果は三角関数の2倍角の公式を用いて正弦関数，余弦関数の簡単な形にする)

- 正弦関数：*sine function*　• 余弦関数：*cosine function*

（3）$W=W\left(y_1,y_2\right)$　(*Wronskian*) を求めよ。
(これも三角関数の公式を使い簡単な形にすること)

8．$y^{(3)}-2y''-5y'+6y=20xe^{3x}$ … ① について，次の各問いに答えよ。(12点)

（1）$y^{(3)}-2y''-5y'+6y=0$ の基本解を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

（2）①の１つの特殊解を演算子法で求めよ。指示に従わない解答には点を与えない。
(計算途中で山辺の方法を使うときは，その計算もかけ)

（3）①の一般解を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

9．$y'=(y-4x)^2$ を解け。(5点)