2015年度後期中間試験問題・数学AⅡ(MC3)

1．$I=\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$，$D: x^2+y^2 \leqq 1$，$y \geqq x$ を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを

解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ 注意：［　］は数値，（　）は式などである。(6点)

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ と変換すると，積分領域は $D \to D'$：$0 \leqq r \leqq 1$，［ 1 ］$\leqq \theta \leqq$［ 2 ］

となり，このときの $Jacobian$ は（ 3 ）となるから，$I=\iint_{D'}$（ 4 ）$drd\theta=$［ 5 ］$\int_0^1$（ 4 ）dr

$=$［ 6 ］となる。

2．$I=\int_0^\infty \dfrac{x^\beta}{(1+x)^\alpha}dx$ $(\alpha>\beta+1, \beta>-1)$ を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを

解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ 注意：［　］は数値，（　）は式などである。(14点)

$t=\dfrac{1}{1+x}$ と置換すれば，$x=$（ 1 ），また $x: 0 \to \infty$ のとき t：（ 2 ）となる。被積分関数は

$\dfrac{x^\beta}{(1+x)^\alpha}=t^{(3)}(1-t)^{(4)}$ となり，$dx=$（ 5 ）dt となる。以上より

$I=\int_0^1 t^{(6)}(1-t)^{(4)}dt=B($（ 7 ），（ 8 ）$)$ （（ 8 ）は β のみの式）

$=\dfrac{(\ 10\ )}{\Gamma((\ 9\ ))}$ となる。$\alpha=3$，$\beta=\dfrac{3}{2}$ のときの I の値を求めると $I=$［ 11 ］$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=$［ 12 ］

3．$I=\iint_D (x-y)^2 dxdy$，D：$0 \leqq x+y \leqq 2$，$0 \leqq x-y \leqq 1$ を求める次の計算の括弧に入る最も

適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ 注意：［　］は数値，（　）は式などである。

(5点)

$x+y=u$，$x-y=v$ と変換すると，積分領域は $D \to D'$：$0 \leqq u \leqq 2$，$0 \leqq v \leqq 1$ となり，このときの

$Jacobian$ は $x=$（ 1 ），$y=$（ 2 ）であるから $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=$［ 3 ］となる。従って

$I=\int_0^2\int_0^1$（ 4 ）$dvdu=$［ 5 ］となる。

4．R，α，β を $R>0$，$\alpha>\beta>0$ を満たす定数とするとき，

$I=\iint_D \dfrac{xy}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2}}dxdy$，$D$：$0<x^2+y^2 \leqq R^2$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を求める次の計算の括弧に

入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ 注意：［　］は数値，（　）は式

などである。(17点)

$0<\varepsilon<R$ に対して D_ε：$\varepsilon^2 \leqq x^2+y^2 \leqq R^2$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ とし，$I_\varepsilon=\displaystyle\iint_{D_\varepsilon} \frac{xy}{\sqrt{\alpha^2 x^2+\beta^2 y^2}}\,dxdy$

とする。$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ と変換すれば，$D_\varepsilon \to D_\varepsilon'$：（１）$\leqq r \leqq R$，$0 \leqq \theta \leqq$［２］とな

るから，$I_\varepsilon=\displaystyle\iint_{D_\varepsilon'} f(r)\,g(\theta)\,drd\theta$ となる。ただし，$f(r)=$（３），$g(\theta)=$（４）である。

$\displaystyle\int_{(1)}^{R} f(r)\,dr=$（５），

$$\int_0^{[2]} g(\theta)\,d\theta=\int_0^{[2]} \frac{(7)}{\sqrt{\alpha^2-\left(\alpha^2-\beta^2\right)(6)}}\,d\theta=\left[\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}(8)\right]_0^{[2]}=(9)$$

以上より $I_\varepsilon=$（１０）となるから，$I=\displaystyle\lim_{(11)} I_\varepsilon=$（１２）となる。

５．$I=\displaystyle\iiint_K x^2 y\,dxdydz$，$K$：$x^2+y^2+z^2 \leqq R^2$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ の値を求めよ。(8点)

６．微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2x}{x^2+1}y=x^3+x$，$y(0)=0$ の解法に関する以下の計算の括弧に入る最も

適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ 注意：［　］は数値。(8点)

$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2x}{x^2+1}y=0$ を解く。変数分離形だから $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 両辺を x で積分して

左辺：$\displaystyle\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\,dx=$（１），右辺：$\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx=$（２）$+C$

$\therefore y=C(\,(3)\,)$（C：任意定数），C を x の関数 $u=u(x)$ に置き換えて $y=u(\,(3)\,)$ とし

問題の微分方程式に代入して整理すると $\dfrac{du}{dx}=$（４）となる。よって $u=\displaystyle\int$（４）$dx=$（５）$+C$

$\therefore y=$（６）（C：任意定数），初期条件から $C=$［７］となるから，求める解は $y=$（８）

７．次の微分方程式の一般解を求めよ。(9点)

（1）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$　　（2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\log x}{xy}$

８．微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=x^2e^x$ … ① について，次の各問いに答えよ。(8点)

（1）$\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=0$ の $\boxed{\text{基本解}}$ を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

（2）①の１つの解 $\eta=\eta(x)$ を求めよ。

（3）①の一般解を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$

9．微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-2y=3e^x$ … ① について，次の各問いに答えよ。(11点)

(1) ①の一般解を求めよ。

(2) 初期条件 $y(0)=1$，$y'(0)=1$ を満たす①の特殊解を求めよ。(東京大)

10．$D=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$ とし，関数 $f=f(x)$ は $x\geqq 0$ で連続で $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が存在するとき，$\boxed{\text{正の定数}}$ a,b にに対して，$\displaystyle\iint_D f\left(a^2x^2+b^2y^2\right)dxdy=(\ 14\ )\int_0^\infty f(x)\,dx$ を証明する次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (14点)

$I=\displaystyle\iint_D f\left(a^2x^2+b^2y^2\right)dxdy$ と表す。また，$R>0$ に対して

$D_R=\{(x,y)\mid a^2x^2+b^2y^2\leqq R^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$，$I_R=\displaystyle\iint_{D_R} f\left(a^2x^2+b^2y^2\right)dxdy$ とする。

変数変換 $x=(\ 1\ )$，$y=(\ 2\ )$ を考えれば $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}(\ 3\ ) & (\ 4\ )\\ (\ 5\ ) & (\ 6\ )\end{vmatrix}=\dfrac{r}{ab}$，

$D_R\to\widetilde{D}_R=\{(r,\theta)\mid(\ 7\ ),(\ 8\ )\}$ （(7)：r の条件，(8)：θ の条件）

$a^2x^2+b^2y^2=(\ 9\ )$ となるから，

$I_R=\displaystyle\iint_{\widehat{D}_R} f((\ 9\ ))\frac{r}{ab}\,drd\theta=(\ 10\ )\int_0^{(11)} f((\ 9\ ))\,r\,dr$，$u=(\ 9\ )$ と置換すると

（(10)：積分を計算せよ）

$=(\ 12\ )\displaystyle\int_0^{(13)} f(u)\,du\quad\therefore I=\lim_{R\to\infty}I_R=(\ 14\ )\int_0^\infty f(x)\,dx$