2015年度前期末試験問題・数学ＡＩ(MC3)

１．$I=\iiint_K xyz\,dxdydz$，$K=\{(x,y,z)\mid 0\leqq x\leqq y\leqq z\leqq 1\}$ の計算に関する次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (16点)

$D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ (\ 1\ )\leqq y\leqq(\ 2\ )\}$ とすれば

$K=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,\ (\ 3\ )\}$ となるので

$$I=\iint_D\left(\int_{(4)}^{(5)} xyz\,dz\right)dxdy=\iint_D(\ 6\ )\,dxdy=\int_0^1\int_{(7)}^{(8)}(\ 6\ )\,dydx=\int_0^1(\ 9\ )\,dx$$

$=(\ 10\ )$

また，K と平面 $z=z$ との共有部分を xy 平面上の有界閉領域 D_z と考えれば

$D_z=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq(\ 11\ ),\ (\ 12\ )\leqq y\leqq(\ 11\ )\}$ となるから

$$I=\int_0^1\left(\iint_{D_z} xyz\,dxdy\right)dz=\int_0^1(\ 13\ )\,dz=(\ 14\ )$$ となる。

２．次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (10点)

$$I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\cos^{-1}y}\log(\sin x)\,dxdy\overset{①}{=}\int_{(1)}^{(2)}\int_{(3)}^{(4)}\log(\sin x)\,dydx\quad (①:\text{積分順序を変更})$$

$$=\int_{(1)}^{(2)}(\ 5\ )\,dx\overset{②}{=}\int_{(6)}^{(7)}(\ 8\ )\,dt\quad (②:\ t=\sin x\ \text{と置換})$$

$$\overset{③}{=}\Big[(\ 9\ )\Big]_{(6)}^{(7)}-\int_{(6)}^{(7)}dt=(\ 10\ )\quad (③:\text{部分積分法})$$

３．$x^2+y^2=2$ のとき，関数 $f(x,y)=x-y$ の最大値，最小値を求めよ。なお，これらの値が存在することは認めることとする。(6点)

４．関数 $f(x,y)=-x^2-2xy+y^3-y^2-15y$ について，次の問いに答えよ。(10点)

(1) この関数が極値を取りえる点を求めよ。

(2) この関数の極値を求めよ。

５．α をパラメータとする曲線群 $x=(y-\alpha)^2+\alpha^2$ の包絡線の方程式を求めよ。(4点)

６．次の関数の第２次偏導関数を求めよ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (6点)

(1) $z=\sqrt{2x+6y}$　　(2) $z=e^{2x}\sin 2y$

7．関数 $f(x, y, z)=x^2+2y^2-z^2+3xy+2zx+x-y$ の極値を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお（ 9 ）は

極大値である。　極小値である。　極値でない。　極値かどうか分からない。

から１つ選んで解答用紙にかけ。（ 9 ）は無解答なら 0 点であるが，誤答なら −3 点とする。

ただし，答のみ。(10点)

f_x=（ 1 ），f_y=（ 2 ），f_z=（ 3 ）より，この関数が極値を取りえる点の座標は（ 4 ）である。この点を A と表す。この関数の *Hesse* 行列の首座行列式を求めると，$D_1=f_{xx}$=（ 5 ），

$D_2=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$=（ 6 ），$D_3=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$=（ 7 ），従って点 A でのこの関数の値（ 8 ）は（ 9 ）

8．曲面 $z=x^2+2y^2$ と平面 $x+y=3$ および３つの座標平面で囲まれる立体の体積 V の値を求めよ。(7点)

9．次の２重積分を求めよ。ただし，(1)，(2) は答のみ。(8点)

(1)　$I=\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy$，$D=\{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1, 1 \leqq y \leqq 4\}$

(2)　$I=\iint_D (y-x)\,dxdy$，$D=\{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq 1, y \leqq x \leqq 2y\}$

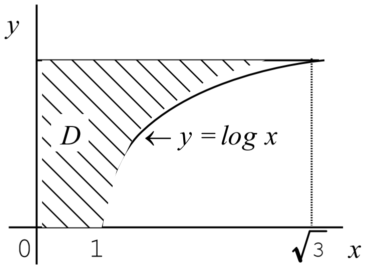
(3)　$I=\iint_D x^2y\,dxdy$，$D=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqq a^2, y \geqq 0\}$　（$a>0$：定数）

10．$I=\iint_D \dfrac{1}{1+e^{2y}}\,dxdy$ の値を求めよ。ただし，$D=D_1 \cup D_2$，

$D_1=\{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq \log\sqrt{3}\}$

$D_2=\{(x, y) \mid 1 \leqq x \leqq \sqrt{3}, \log x \leqq y \leqq \log\sqrt{3}\}$

とする。(7点)



11．$I=\iiint_K \dfrac{1}{(x+y+z+1)^3}\,dxdydz$，$K=\{(x, y, z) \mid x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0, x+y+z \leqq 1\}$ の値を求めよ。(8点)

12．関数 $f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \left((x, y)\neq(0, 0)\right) \\ 0 & \left((x, y)=(0, 0)\right) \end{cases}$ について，次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，$\boxed{\text{答のみ。}}$ (10点)

$$f_x(0, 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h, 0)-f(0, 0)}{h}=(\ 1\ )$$，同様にして $f_y(0, 0)=(\ 2\ )$

$k\neq 0$ のとき，$f_x(0, k)=\lim_{h\to 0}\dfrac{(\ 3\ )}{h}=(\ 4\ )$，$h\neq 0$ のとき，$f_y(h, 0)=\lim_{k\to 0}\dfrac{(\ 5\ )}{k}=(\ 6\ )$

$$\therefore\ f_{xy}(0, 0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0, k)-f_x(0, 0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{(\ 7\ )}{k}=(\ 8\ )$$

$$f_{yx}(0, 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h, 0)-f_y(0, 0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\ 9\ )}{h}=(\ 10\ )$$