2015年度前期中間試験問題・数学ＡＩ（M3 C3）

１．$f(x)=\sin x-\log(1+x)$ について、次の各問いに答えよ。ただし、<u>答のみ</u>。

（1） $f'(x)$ を求めよ。　（2） $f''(x)$ を求めよ。　（3） $f^{(3)}(x)$ を求めよ。

（4） $f^{(n)}(x)$ を求めよ。ただし、n は自然数とする。

（5） $f(x)$ の $x=0$ における２次近似式を求めよ。誤差項は必要ない。

（6） $f(x)$ の $x=0$ における３次近似式を求めよ。誤差項は必要ない。

（7） $f(x)$ の $x=0$ における n 次近似式を求めよ。誤差項は必要ない。

２．次の等比級数が収束する場合はその和を求め、発散する場合は「発散」とかけ。ただし、<u>答のみ</u>。
注意：この問題は無解答なら０点であるが、誤答は３点減点する。

（1） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$　（2） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{n-1}}$

３．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ が発散することを証明した次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

この級数の第 n 部分和を S_n とする。関数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ のグラフを考えれば

$S_n \geqq \displaystyle\int_{(2)}^{(1)}\frac{1}{x+1}\,dx=[\ (\ 3\ )\ ]_{(2)}^{(1)}=(\ 4\ )$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\ 4\ )=(\ 5\ )$ より、この級数は発散する。

４．次の複素数を $u+iv$（u，v は実数）の形で表せ。ただし、<u>答のみ</u>。

（1） $\left(\cos\dfrac{\pi}{10}-i\sin\dfrac{\pi}{10}\right)^5$　（2） $e^{3+\frac{5}{4}\pi i}$

５．$f(x)=e^x$ とするとき、次の各問いに答えよ。

（1） $f(x)$ の *Maclaurin* 展開を求めよ。$\sum$ を用いていない場合は点を与えない。
ただし、<u>答のみ</u>。

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left\{\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right\}$ の値を求めよ。

６．$f(x)=\tan^{-1}x$ とするとき、次の各問いに答えよ。

（1） $\dfrac{1}{1+x^2}$ の *Maclaurin* 展開（$|x|<1$）を求めよ。$\sum$ を用いていない場合は点を与えない。
ただし、<u>答のみ</u>。

（2） 上の（1）の結果を用いて、$f(x)$ の *Maclaurin* 展開（$|x|<1$）を求めよ。

（3） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan^{-1}x}{e^x-1+\log(1-x)}$ の値を求めよ。

7． 次の各問いに答えよ。

(1) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^{2n}$ の収束半径 R を求めよ。

(2) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ の収束半径 R を求める次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし、<u>答のみ</u>。

注意： [1] は n の２次式、[2] は n の１次式が入る。

$a_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ と表せば、$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{([\ 2\ ])^2}{[\ 1\ ]} |x|^{[\ 3\ ]}$

$\therefore \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = [\ 4\ ]$，従って $R = 1$

8． 関数 $z = f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 y^2}$ について、次の各問いに答えよ。なお、$f(x, y)$ は $|xy| < \sqrt{5}$ で全微分可能である。ただし、<u>答のみ</u>。

(1) 全微分 dz を求めよ。

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の $x = -1, y = 2$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ。

9． 次の関数を偏微分せよ。ただし、<u>答のみ</u>。

(1) $z = \frac{\sin x - \cos y}{\sin x + \cos y}$　(2) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$　(3) $z = y^x$ $(y > 0, y \neq 1)$

(4) $z = \sqrt{2x^2 y - 3xy^2}$　(5) $z = \frac{y}{x + y}$　(6) $z = \log_y x$ $(y > 0, y \neq 1)$

10． 関数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$ について、次の各問いに答えよ。

(1) 偏微分係数 $f_x(0, 0)$ および $f_y(0, 0)$ を定義に従って求めよ。

(2) $f(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で連続かどうか調べよ。

(3) $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき、偏導関数 $f_x(x, y)$ および $f_y(x, y)$ を求めよ。ただし、<u>答のみ</u>。