○ *de L'Hospital* の定理

例題１：次の極限値を求めよ。

（1） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{log\,(cos\,3x)}{log\,(cos\,2x)}$　（2） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{cot\,x}{x}\right)$　（3） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{1/x}$

Stop：ロピタルの定理を用いるときは $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であることを確認せよ。

Rule：1^∞，0^0，∞^0 型の不定形は目標の関数の自然対数をとれ。

[解法]（1） 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-3\,sin\,3x}{cos\,3x}}{\dfrac{-2\,sin\,2x}{cos\,2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\,2x}{cos\,3x}\,\frac{3\,sin\,3x}{2\,sin\,2x}$ … ①, ここで

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\,sin\,3x}{2\,sin\,2x}=\lim_{x\to 0}\frac{9\,cos\,3x}{4\,cos\,2x}=\frac{9}{4}$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{cos\,2x}{cos\,3x}=1$，これを①に代入して，

$$\lim_{x\to 0}\frac{log\,(cos\,3x)}{log\,(cos\,2x)}=\frac{9}{4}$$

（2） 省略

（3） $y=\left(\dfrac{3^x+5^x}{2}\right)^{1/x}$ と置く。

$$\lim_{x\to 0}log\,y=\lim_{x\to 0}\frac{log\left(3^x+5^x\right)-log\,2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3^x\,log\,3+5^x\,log\,5}{3^x+5^x}}{1}=\frac{log\,3+log\,5}{2}=log\,\sqrt{15}$$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}e^{log\,y}=e^{log\sqrt{15}}=\sqrt{15}$　$\because\ f(x)=e^x$ は連続関数　$\varDelta$

問題１：次の極限値を求めよ。

（1） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{\sqrt{1+x^2}-1}$　（2） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{log\,(tan\,3x)}{log\,(tan\,2x)}$　（3） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)$

（4） $\displaystyle\lim_{x\to 0}(cos\,x)^{1/x^2}$　（5） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(e^{2x}+3x\right)^{1/x}$　（3） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(e^{2x}+3x\right)^{1/x}$