2018年度学年末試験問題・微分積分Ⅳ（E3）[redacted]

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば
$x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら $(\ 1\ )$ の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。
注意： 特に断らない限り $y=y(x)$ であり，任意定数として C, C_1, C_2 などを用いるときはそのことを解答用紙に書かなくてよい。

1．微分方程式 $y'=y^2-2y-3$ … ① の一般解を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[　] は数値が入る。ただし，答のみ。(8点)

(ここから) ①の 1 つの解は $y_1=-1$ であるから $u=u(x)$ として $y=u-1$ を①に代入し u の微分方程式を導けば，$u'+(\ 1\ )=0$ … ② となる。$z=u^{-1}$ と置けば $z'=(\ 2\ )$ だからこれらを②に代入し z の微分方程式を導けば，$z'-[\ 3\ ]z=[\ 4\ ]$ となり，この方程式の一般解は $z=C(\ 5\ )+[\ 6\ ]$ となる。従って $u=\dfrac{[\ 7\ ]}{C(\ 5\ )+1}$ となるから①の一般解は $y=\dfrac{(\ 8\ )}{C(\ 5\ )+1}$ となる。(ここまで)

2．次の Wronskian を求めよ。ただし，(1) は答のみ。(7点)

(1) $W\left(1, x, x^2, x^3\right)$
(2) $W(\exp ax, \exp bx, \exp cx)$ （a, b, c：定数）（注：1 つの項にまとめよ）

3．微分方程式 $yy'+xy^2=\exp\left(-x^2\right)\sin x$ … ① の一般解を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(10点)

(ここから) $u=y^2$ と置けば $u'=(\ 1\ )$ だから，これらを①に代入して u の微分方程式を導けば，
$u'+(\ 2\ )u=(\ 3\ )\exp\left(-x^2\right)\sin x$ … ② となる。$u'+(\ 2\ )u=0$ を解いて $u=C(\ 4\ )$，
$v=v(x)$ として $u=v(\ 4\ )$ を②に代入して v の微分方程式を導けば，$v'=(\ 5\ )$，これを解いて
$v=\displaystyle\int(\ 5\ )dx+C=(\ 6\ )+C$ となり，これより u が求まるので①の一般解は $y^2=(\ 7\ )$ となる。(ここまで)

4．微分方程式 $y''+4y'+4y=\dfrac{\exp(-2x)}{1+x^2}$ … ① について記述した次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(9点) (東京農工大 改)

(ここから) $y''+4y'+4y=0$ の一般解を y_0 と表せば $y_0=(\ 1\ )$ となる。①の 1 つの解 h を演算子を用いて求める。$h=\dfrac{1}{D^2+4D+4}\left(\dfrac{\exp(-2x)}{1+x^2}\right)=\exp(-2x)\dfrac{1}{(\ 2\ )}(\ 3\ )$，

$\displaystyle\int(\ 3\ )dx=(\ 4\ )$ (積分定数なし) だから

$\dfrac{1}{(\ 2\ )}(\ 3\ )=x(\ 4\ )-\displaystyle\int(\ 5\ )dx=x(\ 4\ )-(\ 6\ )$ となる。以上より①の一般解は
$y=(\ 1\ )+(\ 7\ )$ となる。(ここまで)

5．次の各問いに答えよ。ただし，(1)は答のみ。(10点)

(1) 微分方程式 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ に関する次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，$P(x)$, $Q(x)$ は点 a を含む区間 I で連続な関数とする。

(ここから) この方程式の解を y_1, y_2 とし $W(x)=W\left(y_1, y_2\right)$ とする。$\dfrac{dW}{dx}=[\ 1\ ]W$ だから

$W=W([\ 2\ ])|\exp\left(-\displaystyle\int_a^x [\ 3\ ]dt\right)$ … ① となる。(ここまで)

(2) y_1, y_2 は微分方程式 $y''+2\sqrt{2+x^2}\,y'+Q(x)y=0$ の解で $y_1(0)=-6$, $y_1{}'(0)=8$, $y_2(0)=-8$, $y_2{}'(0)=-3$ を満たすものとする。このとき $W\left(y_1, y_2\right)$ を求めよ。なお，①を用いてよい。また，$Q(x)$ はすべての実数 x で連続な関数とする。

6．微分方程式 $\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}dx+\dfrac{2y+x}{x^2+y^2}dy=0$ … ① について，次の各問いに答えよ。ただし，(1)は答のみ。(13点)

(1) ①の解法に関する次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) ①は $\dfrac{dy}{dx}=[\ 1\ ]$ … ②なので同次形である。$u=\dfrac{y}{x}$ と置き②を用いて u の微分方程式を導けば $u'=[\ 2\ ]$ となるから $\displaystyle\int[\ 3\ ]du=-2\int\frac{dx}{x}+C$，この式の左辺の積分は

$\displaystyle\int[\ 3\ ]du=[\ 4\ ]$ だから $[\ 4\ ]=-2\log|x|+C$，u を戻せば②，即ち① の一般解は

$[\ 6\ ]$ となる。(ここまで)

(2) ①が完全微分方程式であることを示し，完全微分方程式の解法に従って①の一般解を求めよ。

7．微分方程式 $x^2y''-2xy'+2y=x^3\ \ (x>0)$ … ① の解法に関する次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(11点)

(ここから) $x^2y''-2xy'+2y=0$ の基本解は視察により $y_1=x$, $y_2=x^2$ である。①の１つの解 h を $h=xu_1(x)+x^2u_2(x)$ として求める。$h'=u_1+2xu_2+(\ 1\ )$，ここで $(\ 1\ )=0$ … ② を満たすものを考える。このとき $h'=u_1+2xu_2$ となるからさらにこれを微分して $h''=2u_2+(\ 2\ )$ となる。これらを $y=h$ として①に代入して計算すると $(\ 2\ )=(\ 3\ )$ … ③ となる。②，③から $u_1{}'=(\ 4\ )$, $u_2{}'=(\ 5\ )$ だから $u_1=\displaystyle\int(\ 4\ )dx=(\ 6\ )$, $u_2=\displaystyle\int(\ 5\ )dx=(\ 7\ )$，以上より $h=(\ 8\ )$ となるから①の一般解は $y=(\ 9\ )$ となる。(ここまで)

8．問題７の微分方程式 $x^2y''-2xy'+2y=x^3\ \ (x>0)$ を $t=\log x$ と変数変換して解け。(7点)

9．微分方程式 $y^{(4)}-2y^{(3)}+2y''-2y'+y=3x^2+20x+\cos x$ … ① の解法に関する次の記述

括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお，[　　]は数値が入る。
ただし，答のみ。(16点)

(ここから) ①の左辺を $L(y)$ と表す。$L(y)=0$ … ② の特性方程式は (1) だからこれを解けば l =[2]となる。従って②の一般解は y_0=(3)となる。次に $L(y)=\cos x$ の１つの解 h_1 を演算子法で求めれば

$$y_1=\frac{1}{(D^2+[\ 4\ ])(D-[\ 5\ ])^2}\exp((\ 6\ ))=[\ 7\ ]\frac{1}{D^2+[\ 4\ ]}\exp((\ 6\ ))$$

$$=[\ 8\ ]\frac{1}{D-[\ 9\ ]}\exp((\ 6\ ))=[\ 8\ ]\exp((\ 6\ ))\frac{1}{(\ 10\ )}\cdot 1$$

$\therefore y_1$=(11)exp((6))，従って $L(y)=\cos x$ の１つの解 h_1 は y_1 の実部をとって h_1=(12)となる。さらに $L(y)=3x^2+20x$ の１つの解 h_2 を求めれば h_2=(13)となる。
(ここまで)

10．次の微分方程式の１つの解を山辺の方法を用いて求めよ。指示に従わない解答には点を与えない。(9点)

(1) $y^{(3)}-3y''-y'+3y=x^3$　　(2) $y^{(3)}-3y''-y'=x^2$