2018年度後期中間試験問題・微分積分Ⅳ（E3）2018年11月27日

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=$（ 1 ）$(x-1)$ となっていたら（ 1 ）の正解は $(x+3)$ であり，（（ 1 ））$(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

注意： $\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。任意定数として C，C_1，C_2 などを用いるときは特に断らなくてよい。

１．次の各問いに答えよ。なお，$y=y(x)$ である。ただし，答のみ。(25点)

（1） C が定数のとき，曲線 $y=\log(x+C)$ が解曲線となるような微分方程式を作れ。

（2） $y''-y'+2y=4x^2$ … ① について次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $y''-y'+2y=0$ の一般解は $y=$［ 1 ］であり，①の１つの解を $\eta=Ax^2+Bx+C$ とすれば（A，B，C：定数）$A=$［ 2 ］，$B=$［ 3 ］，$C=$［ 4 ］，以上より①の一般解は $y=$［ 5 ］ (ここまで)

（3） $\left(1-x^2\right)y'=2xy$ （$|x|<1$）について次の問いに答えよ。

［1］一般解を求めよ。　［2］$y(0)=1$ を満たす特殊解を求めよ。

（4） $y'=\dfrac{y^2-2x^2}{xy}$ について次の問いに答えよ。

［1］一般解を求めよ。　［2］$y(1)=1$ を満たす特殊解を求めよ。

（5） 次の微分方程式の一般解を求めよ。

［1］$y''+2y'+2y=0$　［2］$y''-2y'+y=0$　［3］$y''-4y'+y=0$

（6） Wronskian $W(\log x,\, x\log x)$ を求めよ。

２．次の重積分を求めよ。なお，a は正定数とする。ただし，答のみ。(8点)

（1） $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$，$D: x^2+y^2 \leqq ax$

（2） $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，$D: ax \leqq x^2+y^2 \leqq a^2$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$

（3） $D: x^2+y^2 \leqq a^2$ とする。

［1］$\displaystyle\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$　［2］$\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$　［3］$\displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$

３．$I=\displaystyle\iiint_K x^2y\,dxdydz$，$D: x+y+z \leqq a$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，a は正定数とする。ただし，答のみ。(10点)

(ここから) 変数変換 $x=u(1-v)$，$y=uv(1-w)$，$z=uvw$ を考えれば K は $\widetilde{K}$：（ 1 ）となり

$J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=$（ 2 ）なので

$$I=\int_0^{(3)}\int_0^1\int_0^1 (\ 4\ )(1-v)^2(1-w)\,dwdvdu$$

$$=\left(\int_0^{(3)}(\ 5\ )\,du\right)\left(\int_0^1(\ 6\ )\,dv\right)\left(\int_0^1(\ 7\ )\,dw\right)=(\ 8\ )$$ (ここまで)

4．次の値を求めよ。なお，$\Gamma(p)$，$B(p,q)$ はそれぞれ Gamma 関数，Bata 関数である。ただし，答のみ。(3点)

(1) $\Gamma\left(\dfrac{7}{2}\right)$　　(2) $B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

5．$D:x^2+xy+y^2\leqq 3,\ y\geqq x,\ I=\iint_D (x-y)\,dxdy$ について，次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(4点)

(1) 座標軸を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転するとき，D はどのような領域 $\widetilde{D}$ に変わるか。X,Y の不等式で答えよ。

(2) I の値を求めよ。

6．広義積分 $I=\iint_D \dfrac{1}{(1+2x^2+y^2)^2}\,dxdy$，$D:x\geqq 0,\ y\geqq 0$ について，次の問いに答えよ。ただし，(1)，(3) は答のみ。(10点)　(金沢大 改)

(1) a,b を正定数とするとき，変数変換 $x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta$ の Jacobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ。

(2) $R>0$ に対し $I_R=\iint_{D_R}\dfrac{1}{(1+2x^2+y^2)^2}\,dxdy$，$D_R:\ 2x^2+y^2\leqq R^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$ とするとき，I_R を求めよ。

(3) I を求めよ。

7．xy 平面上の図形 $D:x^2+y^2\leqq 4a^2,\ x^2+y^2\geqq 2ax$　$(a>0)$ の重心の座標を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(15点)

(ここから) $\iint_D dxdy=(\ 1\ )a^2$ である。重心を $(\overline{x},\overline{y})$ とすれば対称性から $\overline{y}=0$ である。

極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を行えば

$$\iint_D x\,dxdy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{(3)}^{(2)}(\ 4\ )\,drd\theta+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^{(5)}(\ 4\ )\,drd\theta$$

ここで $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^{(5)}(\ 4\ )\,drd\theta=(\ 6\ )$ となり，

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{(3)}^{(2)}(\ 4\ )\,drd\theta=2\int_0^{\pi/2}(\ 7\ )\,d\theta=(\ 8\ )$ となるので $\iint_D x\,dxdy=(\ 9\ )$

$\therefore\ \bar{x}=($ １０ $)$ (ここまで)

８． ３０℃ の温度に保たれた部屋にある物体の温度 $T=T(t)$ の時間変化は k を正定数として $\dfrac{dT}{dt}=-k(T-30)$ なる微分方程式で表される。次の問いに答えよ。(6点)　(新潟大 改)

（１） この微分方程式の一般解を求めよ。ただし，答のみ。

（２） この物体が最初 ９０℃ であったのが０．５時間後に ４５℃ になった。さらに０．５時間経過した後の物体の温度を求めよ。

９．微分方程式 $y''+2y'+y=xe^x$ $(y=y(x))$ … ① について次の問いに答えよ。
ただし，（１），（３）は答のみ。(9点)

（１） $y''+2y'+y=0$ の一般解を求めよ。　　（２） ①の１つの解 $\eta=\eta(x)$ を求めよ。

（３） ①の一般解を求めよ。

１０． Riccatiの微分方程式 $y'+\dfrac{1}{2x}y^2-\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{2}x$ $(y=y(x))$ の１つの解が $y_1=x$ であることを用いてこの微分方程式の一般解を求めた次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(10点)

(ここから) $y=x+v(x)$ として原方程式に代入すると $v'+($ １ $)v=($ ２ $)v^2$ … ①，$w=\dfrac{1}{v}$ として
①に代入すると $w'+($ ３ $)w=($ ４ $)$ … ② となる。$w'+($ ３ $)w=0$ を解けば $w=C($ ５ $)$，
定数 C を $u(x)$ に置き換えた $w=u($ ５ $)$ を②に代入して u を求めれば $u=($ ６ $)+C$ となる。
従って $w=\dfrac{(\ 7\ )}{2x}$ となるので原方程式の一般解は $y=($ ８ $)$ となる。(ここまで)