2018年度前期末試験問題・微分積分Ⅲ (E3)

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば
$x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら（ 1 ）の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。
注意： x の関数 y の $x=a$ のときの値を $y|_{x=a}$ と表すことがある。

１．次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(27点)

(1) α をパラメータとする曲線(直線)群 $y=\alpha^2 x+4\alpha$ の包絡線の方程式を求めよ。

(2) $z=xe^{x-y}$ のとき，次の第２次偏導関数を求めよ。
[1] z_{xx}　[2] z_{xy}　[3] z_{yy}

(3) $z=xy^3-2x^2y$ のとき，次の第３次偏導関数を求めよ。
[1] z_{xxx}　[2] z_{xxy}　[3] z_{xyy}　[4] z_{yyy}

(4) $z=f(x,y)$ は C^3 級で $x=a+ht,\ y=b+kt$ $(a,b,h,k$：定数$)$のとき，次の
[　] に入る h,k の式を答えよ。

(ここから) $\dfrac{dz}{dt}=[\ 1\ ]z_x+[\ 2\ ]z_y,\ \dfrac{d^2z}{dt^2}=[\ 3\ ]z_{xx}+[\ 4\ ]z_{xy}+[\ 5\ ]z_{yy},$

$\dfrac{d^3z}{dt^3}=[\ 6\ ]z_{xxx}+[\ 7\ ]z_{xxy}+[\ 8\ ]z_{xyy}+[\ 9\ ]z_{yyy}$ (ここまで)

(5) $z=x^2+2xy+2y^2-2x-2y$ の停留点の座標を求めよ。

(6) $z=8x^3-6xy-y^3$ に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。
(ここから) $z_x=[\ 1\ ],\ z_y=[\ 2\ ]$ より停留点は $(0,0)$，[3] の２点である。
$D(x,y)=z_{xx}z_{yy}-(z_{xy})^2$ とする。$(0,0)$ で $D=[\ 4\ ]<0$ だから，そこで極値を取らない。
[3] で $D=[\ 5\ ]>0$ であり，そこで $z_{xx}=[\ 6\ ]$ なので点 [3] において [7] 値
$z=[\ 8\ ]$ を取る。(ここまで)

２．次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(24点)

(1) ２平面 $z=x+2$, $3x+y=3$ および３つの座標平面で囲まれる立体の体積 V を求めよ。

(2) 次の２重積分の値を求めよ。

[1] $\displaystyle\iint_D \sin(x-y)\,dxdy,\ D:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$

[2] $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y^2}\,dxdy,\ D:1\leqq x\leqq 3,\ 1\leqq y\leqq x^2$

[3] $\displaystyle\iint_D (x-2y)\,dxdy,\ D:y\geqq x^2,\ y\leqq x+2$

[4] $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,\ D:[0,2]\times[-2,0]$

[5] $\displaystyle\iint_D \left(x^3+xy\right)dxdy$, D：$1 \leqq y \leqq 2$, $1 \leqq x \leqq \sqrt{y}$

[6] $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2+1}\,dxdy$, D：$[0,1]\times[0,2]$

(3) 次の累次積分の<u>積分領域を斜線で図示</u>し，順序を変更せよ。なお，$f(x,y)$ は連続とする。

[1] $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dydx$ [2] $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dxdy$

(4) 次の累次積分の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $\displaystyle I=\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-x^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx=\int_{[\ 1\ ]}^{[\ 2\ ]}\int_0^{[\ 3\ ]}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

$\displaystyle=\int_{[\ 1\ ]}^{[\ 2\ ]}\big[[\ 4\ ]\big]_0^{[\ 3\ ]}dy$ $\left([\ 4\ ]\text{は}\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\text{ を求めた結果を答える}\right)$

$\displaystyle=\int_{[\ 1\ ]}^{[\ 2\ ]}([\ 5\ ])\,dy=\big[[\ 6\ ]\big]_{[\ 1\ ]}^{[\ 2\ ]}=[\ 7\ ]$ (ここまで)

3．関数 $f(x,y)=2x^4-3x^2y+y^2$ の極値に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお [ ] は用語が入る。ただし，<u>答のみ</u>。(12点)

(ここから) $f_x=(\ 1\ )$, $f_y=(\ 2\ )$, $f_{xx}=(\ 3\ )$, $f_{yy}=(\ 4\ )$, $f_{xy}=f_{yx}=(\ 5\ )$ だから

$D=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=(\ 6\ )\left(x^2-y\right)$ となる。停留点の座標を求めると $\begin{cases}(\ 1\ )=0 \cdots ①\\(\ 2\ )=0 \cdots ②\end{cases}$

②から $y=(\ 7\ )$ なのでこれを①に代入して解けば $x=0$, $y=0$ となり原点 $(0,0)$ が求めるものとなる。ここで D の値は 0 となるので，このままでは $f(0,0)=0$ が極値か否か判定できない。そこで曲線 $y=kx^2$ （k：定数）上でこの関数を考えれば $g_k(x)=f\left(x,kx^2\right)=((\ 8\ ))x^4$ となる。$(\ 8\ )>0$ を解けば $(\ 9\ )$ となり，$(\ 8\ )<0$ を解けば $(\ 10\ )$ となる。$(\ 9\ )$ のとき $g_k(0)$ は [11] 値となり，$(\ 10\ )$ のとき $g_k(0)$ は [12] 値となるので $f(0,0)$ は極値でない。
(ここまで)

4．a を正の定数とし，cycloid $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $\left(0 \leqq t \leqq 2\pi\right)$ と x 軸で囲まれた領域を D とする。次の問いに答えよ。(13点)

(1) $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 2\pi$ のとき，$x|_{t=t_1} < x|_{t=t_2}$ が成り立つことを<u>平均値の定理を用いて</u>示せ。

(2) 2 重積分 $I=\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ の値を求めよ。

5．関数 $y(x)$ は，$x=1$ を含むある区間で定義された連続関数で，$x=1$ で極値をとり，$y^3+3xy^2+x^3y=1$ を満たすとする。このとき次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[ ] は数値，< >は用語が入る。ただし，<u>答のみ</u>。(10点) (東京大 改)

(ここから) 陰関数の微分法を用いれば $\dfrac{dy}{dx}=(\ 1\ )$ であり $x=1$ で極値をとるからこのときの y の

値は０か［ ２ ］である。ところが $x=1, y=0$ は $y^3+3xy^2+x^3y=1$ を満たさないので $x=1$ の

とき $y=$［ ２ ］である。$\dfrac{dy}{dx}=0$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$（ ３ ）だから, これに $x=1, y=$［ ２ ］を代入すれ

ば $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}=$［ ４ ］となる。従って $y(x)$ の $x=1$ おける２次近似式は

$y(x)=$（ ５ ）$+o\left((x-1)^2\right)$ となり $x=1$ のときの y の値は＜ ６ ＞値である。(ここまで)

６．次の３重積分の値を求めよ。(14点)

（1） $\displaystyle\iiint_K x^2y^2z\,dxdydz$, $K: 0\leqq y\leqq 1, 0\leqq z\leqq y, 0\leqq x\leqq yz$

（2） $\displaystyle\iiint_K z^2\,dxdydz$, $K: x^2+y^2+z^2\leqq a^2$ （$a>0$：定数）

（3） $\displaystyle\iiint_K xyz\,dxdydz$, $K: 0\leqq x\leqq y\leqq z\leqq 1$