2018年度前期中間試験問題・微分積分Ⅲ（E3）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば
$x^2+2x-3=$（ 1 ）$(x-1)$ となっていたら（ 1 ）の正解は $(x+3)$ であり，（（ 1 ））$(x-1)$
となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは０点とする。

注意： 級数は必ず $\sum$ を用いて答えること。用いていない答のみの問題は点を与えない。

注意： $\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ について，次の文章の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $f'(x)=$［ 1 ］，$f''(x)=$［ 2 ］であるから帰納的に考えて n を自然数とするとき

$f(x)$ の第 n 次導関数は $f^{(n)}(x)=\dfrac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot([\ 4\ ])}{[\ 3\ ]}(1-x)^{[\ 5\ ]}$ であるから

$f^{(n)}(0)=\dfrac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot([\ 4\ ])}{[\ 3\ ]}=\dfrac{(2n)!}{([\ 3\ ])^2[\ 6\ ]}$，これは $n=0$ のときも使えるので結局 $f(x)$

の Maclaurin 展開は $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}[\ 7\ ]$ $\left(|x|<1\right)$ となる。(ここまで)

（2） $f(x)=\log(3-x)$ について，次の問いに答えよ。

［1］ $f(x)$ の Maclaurin 展開は $f(x)=\log 3+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ となる。a_n を答えよ。

［2］ ［1］のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ の収束半径を答えよ。

（3） $f(x)=\sin x-\log(1+x)$ について，次の文章の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $f'(x)=$［ 1 ］だから $f'(0)=0$，$f''(x)=$［ 2 ］だから $f''(0)>0$，従って $f(x)$ は $x=0$ で［ 3 ］値をとる。(ここまで)

（4） 次の極限値を求めよ。

［1］ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{5n^2+n+1}$　　［2］ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-n^4}{n^3}$　　［3］ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{3^n}$

［4］ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2}{n-1}\right)$

（5） 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$ の和を求めよ。

（6） 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は発散する。その理由を答えよ。

（7） 次の等比級数について，収束するときは和を，発散するときは $\boxed{\text{発散}}$ と答えよ。

[1] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$　　[2] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$

(8) $f(x)=\dfrac{1}{3+x}$ のMaclaurin級数を求めよ。

2．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(13点)

(1) 曲面 $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}}$ 上の $x=2,\ y=\dfrac{4}{3}$ に対応する点における接平面の方程式を求める次の計算の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $f(x,y)=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}}$ と置けば，$f\left(2,\dfrac{4}{3}\right)=[\ 1\ ]$，$f_x=\dfrac{[\ 2\ ]}{f(x,y)}$，

$f_y=\dfrac{[\ 3\ ]}{f(x,y)}$ だから $f_x\left(2,\dfrac{4}{3}\right)=[\ 4\ ]$，$f_y\left(2,\dfrac{4}{3}\right)=[\ 5\ ]$，従って求める方程式は

$[\ 6\ ]x+[\ 7\ ]y+3z=[\ 8\ ]$ となる。(ここまで)

(2) 次の関数について $\dfrac{dz}{dt}$ を t の式で答えよ。

[1] $z=\log\left(2x^2+xy+5y^2\right),\ x=\cos t,\ y=\sin t$

[2] $z=\dfrac{x}{y},\ x=e^t+e^{-t},\ y=e^t-e^{-t}$

(3) $z=x^2y,\ x=u+v,\ y=uv$ について，つぎの偏導関数を因数分解した u,v の式で答えよ。

[1] $\dfrac{\partial z}{\partial u}$　　[2] $\dfrac{\partial z}{\partial v}$

3．次の関数を偏微分せよ。ただし，答のみ。(8点)

(1) $z=4x^2-3xy+6y^2$　[1] z_x　[2] z_y

(2) $z=\cos 2x\log 3y$　[1] z_x　[2] z_y

(3) $z=e^{3x}\tan 2y$　[1] z_x　[2] z_y

(4) $z=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$　[1] z_x　[2] z_y

4．次の関数の偏微分係数の値を求めよ。ただし，答のみ。(4点)

(1) $f(x,y)=\log\left(x+y^2\right)$　[1] $f_x(1,2)$　[2] $f_y(1,2)$

(2) $f(x,y)=\exp\left(x^2y\right)$　[1] $f_x(1,2)$　[2] $f_y(1,2)$

5．$y=y(x)=\sin^{-1}x$ $(|x|<1)$ について，次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(11点)

(ここから) $y'=(\ 1\ )$，$y''=(\ 2\ )$ から $\left(1-x^2\right)y''=(\ 3\ )y'$ … ①

①の左辺を $n-1$ 回微分すれば $\left(1-x^2\right)y^{(n+1)}-(\ 4\ )y^{(n)}-(\ 5\ )y^{(n-1)}$

①の右辺を $n-1$ 回微分すれば $(\ 3\ )y^{(n)}+((\ 6\ ))y^{(n-1)}$ となるので，結局

$(1-x^2)y^{(n+1)}+(\ 7\ )y^{(n)}-(\ 8\ )y^{(n-1)}=0$ … ②，この式に $x=0$ を代入すると

$y^{(n+1)}(0)=(\ 8\ )y^{(n-1)}$ … ③ となる。$y(0)=y''(0)=0$，$y'(0)=1$ だから，これと③を繰り返し用いれば $y^{(2k)}(0)=0$，

$$y^{(2k+1)}(0)=\{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot ((\ 9\ ))\}^2=\left\{\frac{(\ 10\ )}{2^k\cdot k!}\right\}^2\ (k=0,1,\cdots)$$

$$\therefore\ \frac{y^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}=\frac{(\ 10\ )}{(2^k\cdot k!)^2((\ 11\ ))}$$ (ここまで)　(島根大 改)

6．$z=x^y y^x\ \ (x>0, y>0)$ のとき，$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z(x+y+\log z)$ が成り立つことを証明せよ。(8点)

7．$A=\alpha$, $\mathrm{AB}=x$, $\mathrm{AC}=6$, $\mathrm{BC}=z$ である三角形 ABC において，x, α がそれぞれ Δx, $\Delta\alpha$ だけ変化したときの z の変化量 Δz はどのような式で近似されるか。(6点)

8．数列 $\{a_n\}$ の漸化式が $a_{n+1}=(\sqrt{2})^{a_n}$ であるとき，次の問いに答えよ。ただし，(1)，(2)は答のみ。(14点)

(1)　$a_1=2$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　　(2)　$a_1=4$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(3)　$a_1<2$ のとき，$\{a_n\}$ は収束することを示し $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　(神戸大 改)

9．関数 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ((x, y)\neq(0, 0))\\ 0 & ((x, y)=(0, 0))\end{cases}$ について，次の問いに答えよ。(11点)

(1)　$f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で連続であることを示せ。

(2)　$f_x(0, 0)$ および $f_y(0, 0)$ を求めよ。

(3)　$f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で全微分可能であるか調べよ。　(富山大)