2016年度微分積分Ⅱ (DS2) 学年末試験問題

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) 次の曲線および直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

[1] 曲線 $x=t^3$, $y=(t-2)^2$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ と x 軸，y 軸

[2] 曲線 $x=e^t$, $y=e^{2t}+1$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と x 軸と２直線 $x=1$, $x=e$

(2) 曲線 $x=t^3$, $y=3t^2$ $(0 \leqq t \leqq \sqrt{5})$ の長さ l を求めよ。

(3) 次の図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

[1] 曲線 $x=t^3$, $y=t^2-1$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ と x 軸で囲まれた図形

[2] 曲線 $x=t^2$, $y=e^t$ $(-1 \leqq t \leqq 0)$ と x 軸，y 軸と直線 $x=1$ で囲まれた図形

(4) 極座標が $\left(4, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ である点の直交座標を求めよ。

(三角関数の値を求めていない解答には点を与えない)

(5) 直交座標が $(3, 0)$ である点の極座標を求めよ。なお，偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(6) 極座標による曲線 $r=1+\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(7) 次の極座標による曲線の長さ l を求めよ。

[1] $r=\sin^4\dfrac{\theta}{4}$ $(0 \leqq \theta \leqq 4\pi)$ 　　[2] $r=\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

(8) 数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度 v が $v=2\sin\pi t$ であるとき，時刻 $t=\dfrac{1}{2}$ から $t=2$ の間に点 P が実際に動いた道のりを求めよ。

２．次の各問いに答えよ。(25点)

(1) 次の直交座標による方程式を極座標 (r, θ) による方程式に直せ。なお，$r \geqq 0$ とし，必要なら θ の範囲も明記せよ。($0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ なら書かなくてよい) ただし，[1] は答のみ。

[1] $x^2+y^2=3$ 　　[2] $y^2-4x-4=0$

(2) 座標平面上を動く点 P の時刻 t $(t \geqq 0)$ における位置が $\begin{cases} x=e^{-t}\cos t \\ y=e^{-t}\sin t \end{cases}$ で与えられている。次の問いに答えよ。ただし，答のみ。 (大分大 改)

[1] $t=\dfrac{\pi}{3}$ のときの点 P の座標を求めよ。

[2] $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ を速度ベクトルといい，$\vec{v}(t)$ と表す。$\vec{v}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

[3] $\vec{v}(t)$ の大きさ $\left|\vec{v}(t)\right|$ を簡単な t の式で表せ。

[4] $0 \leqq t \leqq 3\pi$ の間に点 P が移動した道のりを求めよ。なお，速度ベクトルを用いると移動した道のりは $\displaystyle\int_0^{3\pi}\left|\vec{v}(t)\right|dt$ で求められる。

(3) 懸垂線 $y=\cosh x$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積 S を求める

次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。

(ここから) $\dfrac{dy}{dx}=\sinh x$，$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$，$\cosh x>0$ より $\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}=$［ 1 ］

(［ 1 ］は根号を使わない簡単な式)

$$\therefore S=2\pi\int_{-1}^{1} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\pi\int_{-1}^{1}[\ 2\ ]\,dx=[\ 3\ ]$$ (ここまで)

(4) 次の極座標による方程式で表される図形の概形をかけ。ただし，答のみ。

[1] $r=2\cos\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$　　[2] $r^2\sin 2\theta+2=0\ \left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

3．不定積分 $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$ を求める次の計算の括弧に入る最も適切な式を解答用紙にかけ。なお，(　) は t の式，[　] は x の式である。ただし，答のみ。(11点)

(ここから) $\sqrt{x^2-x+1}=t-x$ … ① とおく。両辺を２乗して計算すると $x=$ (1) … ② となる。これより $dx=$ (2) dt … ③ (計算途中なものには点を与えない) また①，②から

$\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{(\ 3\ )}{2t-1}$ … ④ となる。②～④を I に代入して計算すると

$I=\displaystyle\int\frac{2}{(\ 4\ )}\,dt=$ (5) となる。t を元に戻して $I=$ (5) $=$ [6] と求まる。(ここまで)

4．不定積分 $I=\displaystyle\int\cot^3 x\,dx$ を求めよ。(4点)

5．次の方程式を満たす関数 $y=y(x)$ を求めよ。(10点)

(1) $\dfrac{dy}{dx}=(y-x)^2$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-y^2}{2xy}$

6．次の各問いに答えよ。ただし，(5) は答のみ。(12点)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ を求めよ。　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\int_0^1\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ を求めよ。　　(4) $\displaystyle\int_1^\infty\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ を求めよ。

(5) $\displaystyle\int_0^\infty\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ を求めよ。

7． $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}\,dx$ の収束・発散を判定する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお，［　］には数値が入り，｛　｝には $\boxed{\text{収束する}}$ または $\boxed{\text{発散する}}$ が入る。ただし，答のみ。(7点)

(ここから) de L′Hospitalの定理を用いると

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ 1\ )}{3x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ 2\ )}{6x}=[\ 3\ ]$，従って $0<\alpha<1$ を満たす α に対し

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^{\alpha}(x-\sin x)}{x^3}=0$ となるので $\displaystyle\int_0^1\frac{x-\sin x}{x^3}\,dx$ は｛ 4 ｝。

次に $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x-\sin x)}{x^3}=[\ 5\ ]$ となるので $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}\,dx$ は｛ 6 ｝。

以上より I は｛ 7 ｝。(ここまで)

8． $I_1=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$，$I_3=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^3 x}$ と表す。このとき，次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(6点)

(ここから) $I_1=\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx$ として部分積分法を用いると

$$I_1=\frac{(\ 1\ )}{\sin^2 x}-\int((\ 1\ ))\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\frac{(\ 1\ )}{\sin^2 x}-2\int\frac{(\ 2\ )}{\sin^3 x}\,dx$$

$$=\frac{(\ 1\ )}{\sin^2 x}+(\ 3\ )-2I_3\quad\therefore I_3=\frac{(\ 1\ )}{2\sin^2 x}+(\ 4\ )\ \cdots\ ①$$

$\big($（ 3 ），（ 4 ）は積分を計算しない$\big)$ 一方，$t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置いて I_1 を求めると，$I_1=(\ 5\ )$ となるから，これを①に代入して $I_3=(\ 6\ )$ と求まる。(ここまで)