2016年度微分積分Ⅱ (DS2) 後期中間試験問題

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 次の定積分の値を求めよ。なお，$\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。

［1］ $\displaystyle\int_1^e (3x+1)\log x\,dx$　［2］ $\displaystyle\int_0^{3/2}\sqrt{9-x^2}\,dx$　［3］ $\displaystyle\int_1^2\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

［4］ $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^7 x\,dx$　［5］ $\displaystyle\int_0^1 xe^{3x}dx$　［6］ $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^4 x\sin^2 x\,dx$

［7］ $\displaystyle\int_0^1 (x+2)\,dx$　［8］ $\displaystyle\int_{-3}^3\left(2x^3-x^2-3x+1\right)dx$　［9］ $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{3-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx$

（2） 曲線 $y=x(x-1)(x-2)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

（3） 曲線 $y=\dfrac{1}{3}(x+1)^{3/2}$ $\left(-1\leqq x\leqq 4\right)$ の長さを求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお，［ 2 ］は x の１次式であり［ 3 ］は被積分関数の１つの原始関数である。

(ここから) $\dfrac{dy}{dx}=$［ 1 ］であるから求める曲線の長さを l とすれば，$l=\displaystyle\int_{-1}^4\frac{\sqrt{[\ 2\ ]}}{2}\,dx$

$=\Big[$［ 3 ］$\Big]_{-1}^{4}=$［ 4 ］となる。 (ここまで)

２．次の不定積分を求めよ。なお，積分定数は省略してもよい。ただし，答のみ。(12点)

（1） $\displaystyle\int\frac{(2x-3)^2}{x}\,dx$　（2） $\displaystyle\int 3e^{1-2x}dx$　（3） $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$

（4） $\displaystyle\int\frac{2x^2+3}{x^2+1}\,dx$　（5） $\displaystyle\int\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$　（6） $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$

（7） $\displaystyle\int\sqrt{1-2x}\,dx$　（8） $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+2x-5}\,dx$　（9） $\displaystyle\int(2x-1)\,e^x dx$

（10） $\displaystyle\int(x+1)\log x\,dx$

３．次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(13点)

（1） 部分積分法を用いて，$\displaystyle\int x^2(\log x)^2dx=$［ 1 ］$(\log x)^2-\dfrac{2}{3}\displaystyle\int$［ 2 ］$dx$

$=$［ 1 ］$(\log x)^2-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right.$［ 3 ］$-\dfrac{1}{3}\displaystyle\int$［ 4 ］$\left.dx\right)=$［ 5 ］(最終の結果)

（2） $\displaystyle\int\frac{x+1}{(3x+2)^4}\,dx=$［ 1 ］$\left\{\displaystyle\int\frac{dx}{(3x+2)^3}+\int\frac{dx}{(3x+2)^4}\right\}$ … ① ここで

$\displaystyle\int\frac{dx}{(3x+2)^3}=$［ 2 ］，$\displaystyle\int\frac{dx}{(3x+2)^4}=$［ 3 ］，これらを①に代入して整理すると

$$\int \frac{x+1}{(3x+2)^4}\,dx = -\frac{[\ 5\ ]}{54\,(3x+2)^{[\ 4\ ]}}$$ と求まる。（[4] は指数の値を答える）

4．不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$ を求めよ。なお，積分定数は省略してもよい。(信州大) (5点)

5．a，b は実数の定数で $0<a<1$ を満たすとする。xy 平面上において，２つの関数のグラフ $C: y=\log x$，$l: y=ax+b$ が接する（つまり l が C の接線になっている）とき，次の各問いに答えよ。ただし，(1)，(2)，(3) は答のみ。(改・愛媛大) (12点)

(1) 接点の x 座標を a を用いて表せ。　　(2) b を a を用いて表せ。

(3) $b>0$ となるような a の値の範囲を求めよ。なお，解答は $0<a<1$ であることも考慮せよ。

(4) a の値が (3) で求めた範囲にあるとき，曲線 C，および３直線 l，$x=0$，$y=0$ で囲まれた部分の面積 S を a のみの式で表せ。（図を描くこと）

6．関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続とする。($a<b$) このとき次の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。なお，(1)，(3)，(4) は指数部を答える。ただし，答のみ。(8点)

(ここから) $\exp x = e^x$ であり，また n 個の積 $a_1a_2\cdots a_n$ を $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$ と表す。さらに次のことが成り立つことは用いてよいとする。

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ がすべて正の値ならば，$\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ … ①

$[a, b]$ を n 等分しその分点を $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_n=b$ とする。仮定から

$e^{f(x)}=\exp f(x)$ は連続であるから，$\displaystyle\exp\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)=\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)$ … ②

である。さて，

$$\exp\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)=\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)\right)^{(1)} \overset{ア}{=} \left(\prod_{k=1}^{n}(\ 2\ )\right)^{(1)}$$

$$\overset{イ}{\leqq} \left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ 2\ )\right)^{(3)}\right\}^{(1)} \overset{ア}{=} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ 2\ )\right)^{(4)}$$

（ア: 指数法則，イ: ①および e^x が単調増加であることを用いる）従って

$$\exp\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right) \leqq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ 2\ )\right)^{(4)} \quad \cdots ③$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ 2\ )\right)^{(4)} = \left(\int_a^b (\ 5\ )\,dx\right)^{(4)}$ … ④

②，③，④より $\displaystyle\exp\left((\ 6\ )\int_a^b f(x)\,dx\right) \leqq \int_a^b (\ 5\ )\,dx$ が成り立つ。(ここまで)

7．２曲線 $y=\cos x$，$y=\cos 3x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる

回転体の体積 V を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(15点)

(ここから) $0 \leqq x \leqq$ (1) で $\cos 3x \geqq 0$，(1) $\leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $\cos 3x \leqq 0$ となる。$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で

$\cos x = -\cos 3x$ を満たす x を求めると，和を積に直す公式を用いて

$\cos x + \cos 3x = 2$ (2) $\cos x = 0$ $\therefore x =$ (3) となる。

（(3) は (2) が不正解なら点を与えない）これらの考察から

$$V = \pi\left(\int_0^{(3)} \cos^2 x\,dx - \int_0^{(1)} \cos^2 3x\,dx + \int_{(3)}^{\pi/2} \cos^2 3x\,dx\right) \cdots ①$$

$\displaystyle\int_0^{(3)} \cos^2 x\,dx =$ (4)，$\displaystyle\int_0^{(1)} \cos^2 3x\,dx =$ (5)，$\displaystyle\int_{(3)}^{\pi/2} \cos^2 3x\,dx =$ (6) であるから

これらを①に代入すれば $V =$ (7) と求まる。(ここまで)

8． $a > 0$ なる定数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^2}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4n^2 - k^2}$ の値を定積分を用いて求めよ。

(改・広島大) (10点)

注意：どのような関数をどのような区間で考え，その区間をどのように分割し極限を考えて定積分の形にもって行ったかの説明が配点の 40% を占める。