2016年度微分積分Ⅰ (DS2) 前期末試験問題

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) 次の極限値を求めよ。

[1] $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2-3x+4}{-x^3+x^2+2x-2}$ [2] $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\cos x}{x-\sin 2x}$ [3] $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x^2}$

(2) 関数 $f(x)=xe^{-x}$ について，次の各問いに答えよ。

[1] $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ。 [2] $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ を求めよ。 [3] $f(x)$ の極値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)=x^4-2x^2+1$ に関する次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。
$f'(x)=$[1] であるから $f'(x)=0$ となる x は $x=0$，[2] である。従って増減表から $f(x)$ の極大値は [3] ($x=$[4]) で極小値は [5] ($x=$[6]) となる。

(4) 関数 $y=-x^3+3x^2-a$ の極大値が正，極小値が負となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(5) 定義域 $-1\leqq x\leqq 3$ の関数 $y=x^4-4x^3+4x^2$ について，次の各問いに答えよ。存在しない場合はいずれも無しと答えよ。

[1] 極大値とそれを与える x の値を求めよ。 [2] 極小値とそれを与える x の値を求めよ。
[3] 最大値とそれを与える x の値を求めよ。 [4] 最小値とそれを与える x の値を求めよ。

２．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) 関数 $y=(x-1)e^x$ について，次の問いに答えよ。

[1] 極値とそれをとる x の値を求めよ。 [2] この関数のグラフの変曲点の座標を求めよ。
[3] $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y$ の値を求めよ。($x\to-\infty$ である)

(2) 数直線上の動点 P の座標 x が時刻 t の関数 $x=e^{-\pi t}\sin\pi t$ で表されるとき，次の問いに答えよ。

[1] x' を求めよ。 [2] x'' を求めよ。
[3] $t=3$ における点 P の速度を求めよ。 [4] $t=3$ における点 P の加速度を求めよ。

(3) 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

[1] $y=\dfrac{1}{1+x}$ [2] $y=e^{-x}$

(4) 次の関数の第２次導関数を求めよ。

[1] $y=\tan^{-1}x$ [2] $y=\cos^2 x$

(5) 次の文章の [ ] に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。

$y=e^x\sin x$ の第４次導関数を求める。$(\sin x)^{(3)}=$[1]，$(\sin x)^{(4)}=$[2] だから Leibniz の公式から $y^{(4)}=$[3] となる。

(6) 媒介変数 t で表されている次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求め，t の式で答えよ。

[1] $x=\sin^2 t$, $y=\cos 2t$ $\left(t\neq\dfrac{n\pi}{2},\ n:\text{整数}\right)$

[2] $x=3t^2+2$, $y=-t^3+9t^2$ $(t\neq0)$

３．関数 $y=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ （a, b, c, d：定数）は $x=-1, 1, 3$ で極値を取るという。このとき，次の各問いに答えよ。(16点)

（1） 定数 a, b, c の値を求めよ。

（2） 極小値と極大値を d を用いて表せ。a, b, c は（1）で求めた値を用いること。

（3） 極小値が負，極大値が正となるような d の値の範囲を求めよ。ただし，答のみ。

４．次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(9点)
(千葉大 改)

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\log(1+x^2)}}$ を求めるため，まず $y=(\cos x)^{\frac{1}{\log(1+x^2)}}$ と表す。このとき

$\log y=\dfrac{\log(\cos x)}{(\ 1\ )}$ となり，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\log y=\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{(\ 1\ )}$ は $\dfrac{0}{0}$ 型だから de L'Hospital

の定理を用いて $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{(\ 1\ )}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ 2\ )}{2x\cos x}=(\ 3\ )$ となる。

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\log(1+x^2)}}=\lim_{x\to 0}e^{\log y}=(\ 4\ )$ となる。別解として

$$(\cos x)^{\frac{1}{\log(1+x^2)}}=(1+((\ 5\ )))^{\frac{1}{\log(1+x^2)}}=\left\{(1+((\ 5\ )))^{\frac{1}{(\ 5\ )}}\right\}^{\frac{(\ 5\ )}{\log(1+x^2)}}$$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+((\ 5\ )))^{\frac{1}{(\ 5\ )}}=(\ 6\ )$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\ 5\ )}{\log(1+x^2)}=(\ 7\ )$ だから

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\log(1+x^2)}}=(\ 4\ )$ と同じ結果を得る。

５．次の計算の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(11点)

注意：問題番号を囲む括弧は数学上必要な括弧を兼ねない。例えば正解が $(x+1)(x-2)$ で，問題が（ 1 ）$(x-2)$ となっていたら，（ 1 ）の答えは $(x+1)$ である。$x+1$ と解答したら誤りである。次に二項係数は具体的に計算したものを答える。${}_nC_k$ のままでは点を与えない。

(ここから)

$y=(x^2-1)^n$ （n：自然数）とすれば $y'=(\ 1\ )$　$\therefore\ (x^2-1)y'=(\ 2\ )y$ … ①

①の両辺を $n+1$ 回微分する。Leibnizの公式を用いて

左辺：$\left((x^2-1)y'\right)^{(n+1)}=(\ 3\ )y^{(n+2)}+(\ 4\ )y^{(n+1)}+(\ 5\ )y^{(n)}$ … ②

右辺：$((\ 2\ )y)^{(n+1)}=(\ 2\ )y^{(n+1)}+(\ 6\ )y^{(n)}$ … ③

② = ③から（ 3 ）$y^{(n+2)}+(\ 7\ )y^{(n+1)}-(\ 8\ )y^{(n)}=0$ が成り立つ。

(ここまで)

参考：（ 3 ）$P''(x)+(\ 7\ )P'(x)-(\ 8\ )P(x)=0$ … ④

を満たし，かつ $P(1)=1$ … ⑤ となる n 次多項式を Legendre (ルジャンドル) 多項式という。

問題５の最後の式から$f(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}\left\{\left(x^2-1\right)^n\right\}$とおけば④を満たす。さらに⑤を満たすには

$P(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left\{\left(x^2-1\right)^n\right\}$ … ⑥ とすればよいことが容易な考察から分かる。この⑥を Rodorigues (ロドリーグ) の公式といい，Legendre 多項式の１つの表現である。また④を Legendre 方程式という。

６．関数 $y=\left(x^3+x^2\right)^{\frac{1}{3}}\left(=\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$ について，次の各問いに答えよ。

ただし，（1）は答のみ。(8点)

（1） $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}$ を求めよ。（$x\to\pm\infty$ である）

（2） （1）で求めた値を a とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(y-ax)$ を求めよ。（Hint：$\alpha^3-\beta^3$ の因数分解）

７．関数 $f(x)=\exp\left(-x^2\right)$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ は，ある n 次の整式 $\phi_n(x)$ によって $f^{(n)}(x)=\phi_n(x)\exp\left(-x^2\right)$ と表されることを証明する次の論理の（　）に入る最も適切な答えを解答用紙にかけ。ただし，答のみ。(6点) (筑波大 改)

注意： $\exp x=e^x$ である。また $\phi_n(x)$ の次数を記号で $\deg\phi_n(x)$ と表す。

例： $\deg\left(-x^3+2x-1\right)=3$

(ここから)

$f^{(1)}(x)=(\ 1\ )\exp\left(-x^2\right)$ であるから $\phi_1(x)=(\ 1\ )$ と考えれば $n=1$ のとき成り立つ。

$n=k$ のとき $f^{(k)}(x)=\phi_k(x)\exp\left(-x^2\right)$ … ① が成り立つと仮定する。なお，$\phi_k(x)$ は $\deg\phi_k(x)=k$ を満たす整式である。①から

$f^{(k+1)}(x)=(\ 2\ )\exp\left(-x^2\right)-(\ 3\ )\exp\left(-x^2\right)$ となる。ただし，$\deg(\ 2\ )<\deg(\ 3\ )$

即ち $\deg(\ 2\ )=(\ 4\ )$，$\deg(\ 3\ )=(\ 5\ )$ である。従って $\phi_{k+1}(x)=(\ 6\ )$ と考えれば

$\phi_{k+1}(x)$ は $\deg\phi_{k+1}(x)=k+1$ を満たす整式となり $f^{(k+1)}(x)=\phi_{k+1}(x)\exp\left(-x^2\right)$

となるから $n=k+1$ のときも成り立つ。以上より任意の自然数 n で主張が成り立つ。　(ここまで)

次の問題は配点(100点)には加えず，解いた者には加点する。ただし，正誤の判断はむずかしく，正しくないものを選んだ場合は減点されるので安易に答えないこと。下手をするとこの試験の合計点数が負の値になるかもしれない。なお，正しいものの個数を推測されないためにこの問題の配点は明記しない。

ω．次の記述で正しいものをすべて選び，その符号（あ，い，う …）を解答用紙にかけ。なお，正しくないものを選んだ場合は１つにつき２点減点する。

あ：関数 $f(x)$ が微分可能なとき，$f'(x)=0$ を満たす x で極値をとる。

い：関数の極大値のうち最も大きい値が最大値である。

う：関数の極小値のうち最も小さい値が最小値である。

え：閉区間で連続な関数はその区間で必ず極値をもつ。

お：関数 $f(x)$ が２回微分可能なとき，$f''(x)=0$ を満たす x に対応する点は，曲線 $y=f(x)$ の変曲点である。

変曲点である。

か: 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，そこで連続である。

き: 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続ならば，そこで微分可能である。

条件１: 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能である

く: $f(x)$ が条件１を満足するならば Rolle の定理の結論が成り立つ。

け: $f(x)$ が条件１を満足するならば Lagrange の平均値の定理の結論が成り立つ。

こ: $f(x)$，$g(x)$ がともに条件１を満足するならば Cauchy の平均値の定理の結論が成り立つ。

さ: 関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならばそこで微分可能である。

し: 関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能でそこで単調増加ならば I のすべての点で $f'(x)>0$ である。

す: 関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能でそこで単調減少ならば I のすべての点で $f'(x)<0$ である。

せ: 関数の極大値は極小値より必ず大きい。

そ: 関数は極小値より小さい極大値をもつことがある。

た: 定義域が閉区間 $[a, b]$ の関数は $x=a$ または $x=b$ で極値をとることがある。