

2016年度前期中間試験問題・微分積分 I (DS2)

1. 次の極限值を求めよ。ただし、答のみ。 (9点)

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2+2}}$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x})$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ (5) $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sin x$ (三角関数の値を求めよ)

(6) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2+5x-3}{2x-1}$ (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \tan \frac{x}{3}$ (8) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{3/x}$

2. 次の関数を微分せよ。ただし、答のみ。 (16点) 注意: (8) 同類項を計算せよ

(1) $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ (2) $y = \sqrt[6]{x} + \sqrt[4]{x^5}$ (3) $y = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$

(4) $y = \frac{1}{(3-2x)^2}$ (5) $y = \frac{1}{(-x+2)^5}$ (6) $y = \tan(x-2)$

(7) $y = -2 \cos(3x+1)$ (8) $y = (x^2-x+1)e^x$ (9) $y = e^{3x} \cos(2x+1)$

3. 次の関数を微分せよ。ただし、答のみ。 (25点)

(1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ (2) $y = \frac{1}{(3-x)^3}$ (3) $y = (x^2-3)(2x+1)$

(4) $y = \sin(5x-1)$ (5) $y = e^{3x+2}$ (6) $y = (x^2+x)^{2/3}$

(7) $y = \frac{1}{1+\sin x}$ (8) $y = \tan^5 x$ (9) $y = \tan^2(3x-4)$

(10) $y = \cos x \log(\sin x)$ ($\cos x$ と $\log(\sin x)$ の積)

(11) $y = \log \frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$ ($x > 1$) (12) $y = (\sqrt{2}x-3)^{\sqrt{2}}$ (13) $y = (2x)^x$

(14) $y = \log|x^2-1|$ (15) $y = \log_{10}|2x+3|$ (16) $y = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$

(17) $y = \cos^{-1} x^2$ (18) $y = (\tan^{-1} x)^2$

4. 方程式 $x^3 - 3x = 1$ は区間 $(-1, 1)$ に少なくとも 1 つの実数解をもつことを証明せよ。(5点)

5. 次の値を求めよ。ただし、答のみ。 (6点)

(1) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (2) $\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $\cos^{-1}(-1)$ (4) $\sin^{-1}(-1)$

(5) $\sin^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)$ (6) $\tan^{-1}\left(\tan \frac{2\pi}{3}\right)$

6. $f(x)$ が微分可能であるとき、極限值 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^4 f(x) - x^4 f(a)}{x - a}$ を $a, f(a), f'(a)$ で表せ。

(6点)

7. 次の計算の () に入る最も適切な数式を解答用紙にかけ。ただし、答のみ。 (8点)

$$y = x^2 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \quad (0 < |x| < 1) \text{ の両辺の対数をとれば } \log y = 2(1) + \frac{1}{2}(2) - (3)$$

となる。この両辺を x で微分すると左辺は (4) となり右辺は (5) となる。

((5) は通分した結果をかくこと) 従って、 $\frac{dy}{dx} = (6)$ と求まる。

8. 関数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \leq 1) \\ \frac{ax+b}{x+1} & (x > 1) \end{cases}$ について、次の各問いに答えよ。ただし、 a, b は定数とする。

(7点)

(1) $f(x)$ が $x=1$ で連続となるための a, b の条件を求めよ。ただし、答のみ。

(2) $f(x)$ が $x=1$ で微分可能となるように a, b の値を求めよ。

9. $y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ($-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$) について、次の各問いに答えよ。

ただし、答のみ。 (9点) (筑波大・改)

(1) 次の計算の [] に入る最も適切な数式を解答用紙にかけ。

$X = e^x$ とおき $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ を X で表せば [1] = y となり、これから X の2次方程式 [2] = 0

が導かれる。これを解けば $X = [3]$ となるが、 $X > 0$ であるから $X = [4]$ となり $e^x = [4]$ から $x = [5]$ となる。従って、 $y = f(x)$ の逆関数は存在して、 $y = f^{-1}(x) = [6]$ となる。

(2) (1) で求めた逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ。(x の式で表せ)

10. $\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1}(-2)$ を簡単にせよ。(値を求めよ) (9点)