# 2017年度学年末試験問題・微分積分Ⅳ（DC3）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば
$x^2+2x-3=($ １ $)(x-1)$ となっていたら（ １ ）の正解は $(x+3)$ であり，$(($ １ $))(x-1)$
となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは０点とする。

注意： 特に断らない限り，$y=y(x)$，$y'=\dfrac{dy}{dx}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ である。

注意： 任意定数として $C$，$C_1$，$C_2$，$\cdots$ の文字を用いた場合は，任意定数であることを解答で断らなくてもよい。

１． Lagrangeの微分方程式 $y=xg(p)+f(p)$ … ① $\left(p=\dfrac{dy}{dx}\right)$ の解法に関する次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお［　］には数値が入り，$g(p)$，$f(p)$ は微分可能で，関数として $g(p)\neq p$ である。ただし，答のみ。(20点)

(ここから) ①の両辺を $x$ で微分する。左辺は $p$ になり右辺は $g(p)+($ １ $)$ となる。よって

$p=g(p)+($ １ $)$ … ②，②から $\dfrac{dp}{dx}$ を求めると $\dfrac{dp}{dx}=($ ２ $)$ … ③

$x$ を $p$ の関数 $x=x(p)$ とみて逆関数の微分法を用いれば $\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{1}{(\ 3\ )}$，これと③から

$\dfrac{1}{(\ 3\ )}=($ ２ $)$ … ④，④から $x=x(p)$ の１階線形微分方程式 $\dfrac{dx}{dp}+($ ４ $)x=($ ５ $)$ … ⑤

が導かれる。（（ ４ ），（ ５ ）は $p$ のみの式）$\dfrac{dx}{dp}+($ ４ $)x=0$ を解くと

$x=C\exp\left(\displaystyle\int(\ 6\ )\,dp\right)$ （$C$：任意定数）となり，あとは定数変化法を用いて⑤を解けば

$x$ が $p$ の関数として求まり，これと①から $x$，$y$ がパラメータ $p$ による媒介変数表示で求まる。
さらに $g(p_0)=p_0$ を満たす実定数 (実数の定数) が存在すれば $y=($ ７ $)$ も①の解である。

実際の問題として $y=2xp(1-2p)+p^4-\dfrac{p^3}{3}$ … ⑥ $\left(p=\dfrac{dy}{dx}\right)$ を解いてみる。

⑤に相当するものを求めると $\dfrac{dx}{dp}+($ ８ $)x=($ ９ $)$ … ⑦，$\dfrac{dx}{dp}+($ ８ $)x=0$ を解いて

$x=($ 10 $)$ （$C$：任意定数）Lagrangeの定数変化法を用いて⑦の一般解を求めれば

$x=($ 10 $)+($ 11 $)$ … ⑦ となる。⑦を⑥の $x$ に代入すれば $y=[\ 12\ ]p^3+2C(($ 13 $))$
なお，⑦の解は他に $y=0$ と $y=($ 14 $)$ がある。(ここまで)

２． $y^{(4)}-y''-6y=0$ … ① の解法に関する次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお［　］には実数値が入る。ただし，答のみ。(5点)

(ここから) ①の特性方程式は（ １ ）だからこれを解けば $\lambda=[\ 2\ ]$，$\lambda=[\ 3\ ]i$，従って①の一般解は $y=($ ４ $)$ （$C_1$，$C_2$，$C_3$，$C_4$：任意定数）(ここまで)

３．連立微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - 4y \end{cases}$ $\left( x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \right)$

の解法に関する次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお [　　] には数値が入る。ただし，答のみ。(14点)

(ここから) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表せば問題の方程式は $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ … ①，$A =$ ( １ ) となる。$A$ の固有値

多項式は $|A - \lambda E| = ((\ 2\ ))((\ 3\ ))^2$ となる。∴ $((\ 2\ ))((\ 3\ ))^2 = 0$ の解が固有値でそ

れを $\lambda_1, \lambda_2$ $(\lambda_1 < \lambda_2)$ と表す。$\lambda_1$ に対する固有ベクトルを１つ求めれば $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ [\ 4\ ] \end{pmatrix}$，

，$\lambda_2$ に対する２つの線形独立な固有ベクトルを求めれば $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} [\ 5\ ] \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

$A$ の対角化行列を $P = \left( \boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3 \right) = \begin{pmatrix} 1 & [\ 5\ ] & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ [\ 4\ ] & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ と変換すれば

①は $P\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = AP\boldsymbol{y}$ となるから $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = P^{-1}AP\boldsymbol{y} = (\ 6\ )\boldsymbol{y}$ … ②，これは簡単に解けて

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} C_1(\ 7\ ) \\ C_2(\ 8\ ) \\ C_3(\ 8\ ) \end{pmatrix}$ $\left( C_1, C_2, C_3 : 任意定数 \right)$ となるから結局 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} (\ 9\ ) \\ (\ 10\ ) \\ (\ 11\ ) \end{pmatrix}$

(ここまで)

４．$y^{(3)} - 2y'' - 5y' + 6y = e^{-2x}$ … ① について，次の問いに答えよ。ただし，(1)，(2)，(4) は答のみ。(11点)

（1） $y^{(3)} - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ の基本解 $y_1, y_2, y_3$ を求めよ。なお，$x > 0$ で $y_1 < y_2 < y_3$ とする。 [1] $y_1$　 [2] $y_2$　 [3] $y_3$

注意：一般解を答えるのではない。また，特性方程式から直接求まる基本解を答えよ。

（2） Wronskian $W\left(y_1, y_2, y_3\right)$ を求めよ。

（3） ①の１つの解 $\eta = \eta(x)$ を Heaviside の演算子法を用いて求めよ。指示に従わない解答には点を与えない。

（4） ①の一般解を求めよ。

5．Bernoulliの微分方程式の１つである $2xy'+x^3\cdot\sqrt{x}\,y^2+\left(1-6x^3\right)y=0$ … ①
をLagrangeの定数変化法を用いて解く次の解法の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお, ①は $x>0$ で考えるものとする。また, 積分は計算したものを答えること。ただし, 答のみ。(10点)

(ここから) ①は $x>0$ のとき $y'+(\ 1\ )y=(\ 2\ )y^2$ … ② となる。まず $y'+(\ 1\ )y=0$ を解いて $\log|y|=(\ 3\ )+C$ $\therefore y=C(\ 4\ )$ （$C$：任意定数）, この $C$ を $x$ の関数 $u=u(x)$ に置き換えた式 $y=u(\ 4\ )$ … ③ を②に代入して計算すれば $u$ の微分方程式 $\dfrac{1}{u^2}u'=(\ 5\ )$ が導かれる。これを解いて $u=\dfrac{1}{(\ 6\ )+C}$ , これを③に代入すれば①の一般解 $y=(\ 7\ )$ が得られる。これとは別に $y=0$ （定数関数０）も解である。(ここまで)

6．$y^{(3)}+3y''-y'-3y=3x^2+20x$ … ① について, 次の問いに答えよ。(15点)

（1） ①の一般解を求めよ。なお, １つの解を求めるときは山辺の方法を用いよ。指示に従わない解答には点を与えない。

（2） $y^{(3)}+3y''-y'-3y=0$ … ② (斉次) の基本解を $y_1, y_2, y_3$ とする。$W\left(y_1, y_2, y_3\right)$ を求める次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし, この問題は答のみ。

注意：基本解に関する注意は問題４（1）と同じである。

(ここから) $x>0$ で $y_1<y_2<y_3$ とする。$x=0$ のとき $W\left(y_1, y_2, y_3\right)$ の値は［ 1 ］であるから

$$W\left(y_1, y_2, y_3\right)=[\ 1\ ]\exp\left(-\int_0^x[\ 2\ ]\,d\xi\right)=[\ 3\ ]$$ (ここまで)

（3） 初期条件 $y(0)=0,\ y'(0)=3,\ y''(0)=4$ を満たす①の特殊解を求めよ。

7．微分方程式 $\left(1+e^x\sin y\right)dx+\left(1+e^x\cos y\right)dy=0$ … ① について, 次の問いに答えよ。(6点)

（1） $P=1+e^x\sin y,\ Q=1+e^x\cos y$ と表すとき, 次の偏導関数を求めよ。ただし, この問題は答のみ。 ［1］ $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ［2］ $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (両方正解のとき点を与える)

（2） ①の一般解を求めよ。

8．微分方程式 $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$ … ① について, 次の問いに答えよ。なお, $x>1$ とする。(19点)

（1） $(x-1)y''-xy'+y=0$ … ② を満たす１つの解 $y_1$ を求めよ。なお, 関数として $y_1\neq 0$ とする。ただし, この問題は答のみ。

（2） ①の解を $y=uy_1$ （$u=u(x)$）とするとき, $u$ が満たす微分方程式は

$u''+S(x)u'=T(x)$ … ③ となる。$S(x)$, $T(x)$ を求めよ。

（3） $w=u'$ と置くと③は $w'+S(x)w=T(x)$ … ④ となる。これについて

［1］ $w'+S(x)w=0$ の一般解を求めよ。

［2］ ［1］の結果と定数変化法を用いて④の一般解を求めよ。

（4）（3）の結果から $u$ を求め，それにより①の一般解を求めよ。

参考: 問題１の⑥の解曲線。実線は $C=1$ の場合，破線は $C=0$ の場合である。