2017年度後期中間試験問題・微分積分Ⅳ（DC3）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば
$x^2+2x-3=$（ １ ）$(x-1)$ となっていたら（ １ ）の正解は $(x+3)$ であり，（（ １ ））$(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは０点とする。

注意： 特に断らない限り，$y=y(x)$，$y'=\dfrac{dy}{dx}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ である。

注意： 任意定数として C，C_1，C_2 の文字を用いた場合は，任意定数であることを解答で断らなくてもよい。

１．微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3y-x}{x}$　$(x>0)$ について，次の問いに答えよ。
ただし，（1），（3）は答のみ。(15点)

（1） 次はこの微分方程式を１階線形微分方程式として一般解を求めた解法である。括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) 方程式は $y'-\dfrac{3}{x}y=-1$ … ① と変形できるのでまず $y'-\dfrac{3}{x}y=0$ を解くと $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{3}{x}$ から $y=C$［ １ ］（C：任意定数）となる。Lagrangeの定数変化法を用いて C を x の関数 $u=u(x)$ に置き換えた $y=u$［ １ ］を①に代入して整理すれば $u'=$［ ２ ］，これを解けば $u=$［ ３ ］$+C$ となるので①の一般解は $y=$［ ４ ］（C：任意定数）となる。(ここまで)

（2） 問題の微分方程式を同次形とみて一般解を求めよ。同次形の解法に従っていないものは点を与えない。

（3） $y(1)=2$ を満たす特殊解を求めよ。

２．微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{dy}{dx}+1\right)^2$ について，次の問いに答えよ。(10点)

（1） 一般解を求めよ。　　（2） $y(0)=1$，$y'(0)=0$ を満たす特殊解を求めよ。

３．微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=2x^2-6x-7$ … ① について，次の問いに答えよ。
ただし，（1），（2），（3）は答のみ。(12点)

（1） $y''+2y'+y=0$ の一般解を求めよ。

（2） ①の１つの解の形を $y=Ax^2+Bx+C$（A，B，C：定数）とするとき，次の値を求めよ。
　［1］ A　　［2］ B　　［3］ C

（3） ①の一般解を求めよ。

（4） ①の解で初期条件 $y(0)=y'(0)=0$ を満たす特殊解を求めよ。

4．連立微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y + t & \cdots ① \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y - 5t + 1 & \cdots ② \end{cases}$ $(x = x(t)\,,\, y = y(t))$ の解法に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお [　] は数値，(　) は式が入る。ただし，答のみ。(13点)

(ここから) $\dfrac{dx}{dt} = x'$，$\dfrac{dy}{dt} = y'$ と表す。①から $y = x' - 4x - t$ ⋯ ③，これを微分して

$y' = x'' - 4x' - 1$ ⋯ ④ となる。③，④と②から x のみの微分方程式を導けば

$x'' - [\ 1\ ]x' + [\ 2\ ]x = (\ 3\ )$ ⋯ ⑤ となる。$x'' - [\ 1\ ]x' + [\ 2\ ]x = 0$ を解けば

$x = C_1 e^{[\ 4\ ]t} + C_2 e^{[\ 5\ ]t}$ $(C_1, C_2$：任意定数，$[\ 4\ ] < [\ 5\ ])$ となる。⑤の１つの解の形を

$x = At + B$ $(A, B$：定数$)$ として求めると $x = (\ 6\ )$ となるので⑤の一般解は $x = (\ 7\ )$ となる。

これを③に代入すれば $y = (\ 8\ )$ となる。(ここまで)

5．Gamma 関数の次の値を求めよ。(階乗なども計算せよ) ただし，答のみ。(6点)

(1) $\Gamma(9)$　(2) $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)$　(3) $\Gamma\left(\dfrac{7}{2}\right)$　(4) $\Gamma\left(\dfrac{11}{2}\right)$

6．Beta 関数の次の値と定積分の値を求めよ。(階乗，べき乗なども計算し，約分したものを答えよ) ただし，答のみ。(5点)

(1) $B(2, 2)$　(2) $B\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$　(3) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^7 x\, dx$　$\left(\pi/2 = \dfrac{\pi}{2}\right)$

7．$I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{(1+x)^4}\, dx$ を Beta 関数，Gamma 関数を用いて求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。$\left(3/2 = \dfrac{3}{2}\right)$ なお [　] は数値，(　) は t の式が入る。

ただし，答のみ。(8点)

(ここから) $t = \dfrac{1}{1+x}$ と置換すれば $dx = (\ 1\ )\,dt$，$\dfrac{x^{3/2}}{(1+x)^4} = t^{[\ 2\ ]}(1-t)^{[\ 3\ ]}$ となるから

$I = \displaystyle\int_0^1 t^{[\ 4\ ]}(1-t)^{[\ 3\ ]}\, dt = B([\ 5\ ], [\ 6\ ])$ $([\ 5\ ] < [\ 6\ ])$

$B([\ 5\ ], [\ 6\ ]) = \dfrac{\Gamma([\ 5\ ])\,\Gamma([\ 6\ ])}{\Gamma([\ 7\ ])} = [\ 8\ ]$　$\therefore I = [\ 8\ ]$ となる。(ここまで)

8．$I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\log\frac{1}{x}}\, dx$ を求めよ。なお $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ の値は証明なしで用いてよい。(6点)

9．ある一定の環境下で，ある生物個体群の増加率はその時点での個体数 $N(t)$ に比例し，しかも

飽和状態の個体数 P（正定数）と $N(t)$ との差にも比例する。即ち $\dfrac{dN}{dt}=kN(P-N)$ を満たす。$N(0)=\alpha P$ $(0<\alpha<1)$ として，個体数 $N(t)$ を求めよ。ただし，k は正定数である。(8点)

10．微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-3x\dfrac{dy}{dx}+4y=0$ $(x>0)$ … ① について，次の問いに答えよ。ただし，(1)，(2)，(3) は答のみ。(17点)

(1) 解の形を $y=x^{\alpha}$ $(\alpha:$ 定数$)$ と仮定して１つの解を求めよ。(この解を y_1 とする)

(2) $y_2=uy_1$，$u=u(x)$ として Lagrange の定数変化法を用いて y_2 を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) y_2 を①の y に代入して $x>0$，即ち $x\neq 0$ に注意して整理すると u の微分方程式 [1] $u''+u'=0$ … ② が導かれる。$u'=v$ と置けば②は [1] $v'+v=0$ となるからこれを解くと $v=C_1$ [2] となる。１つの解を求めるので $C_1=1$ とする。即ち $u'=v=$ [2]，これを解けば $u=$ [3] となる。ただし，任意定数を０とした。以上より $y_2=$ [3] $y_1=$ [4] となる。(ここまで)

(3) 上で求めた y_1，y_2 に対し $W(y_1, y_2)$ (Wronskian) を求めよ。

(4) $t=\log x$ と変数変換して①の一般解を求めよ。指示に従わない解答には点を与えない。