2017年度前期末試験問題・微分積分Ⅲ(DC3)

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば

$x^2+2x-3=$ (１) $(x-1)$ となっていたら (１) の正解は $(x+3)$ であり，((１)) $(x-1)$

となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは０点とする。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） 関数 $f(x,y)=8x^3-6xy-y^3$ について，次の問いに答えよ。

［1］ 停留点の座標を求めよ。　［2］ $D(x,y)=f_{xx}f_{yy}-\left(f_{xy}\right)^2$ を求めよ。

［3］ 極値と，それを取る点の座標を求めよ。

（2） 次の方程式で与えられる x の関数 y を微分せよ。

［1］ $\sqrt{x}+\sqrt{y}-1=0$　［2］ $x^3y^3+y-x=0$

（3） 方程式 $\cos(xyz)=1$ で与えられる x,y の関数 z について，次のものを求めよ。

［1］ z_x　［2］ z_y　［3］ z_{xx}　［4］ z_{xy}　［5］ z_{yy}

（4） 曲面 $x\log y-\log z=0$ 上の $x=1,y=e$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ。ただし，$ax+by+cz+d=0$ の形(a,b,c,d は定数)で答えよ。また，簡単に求められる関数値は求めたものを答えよ。

（5） 条件 $x^2+y^2=4$ のもとで関数 $f(x,y)=x+4y+1$ を考えるとき，次の問いに答えよ。

［1］ この条件のもとで $f(x,y)$ が極値を取りえる点の座標を求めよ。

［2］ この条件のもとで $f(x,y)$ の最大値と，それを取る点の座標を求めよ。

［3］ この条件のもとで $f(x,y)$ の最小値と，それを取る点の座標を求めよ。

２．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(20点)　(注意：（2）の［2］は１つにまとめよ)

（1） 次の２重積分の値を求めよ。

［1］ $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\ D=\left\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq\sqrt{x}\right\}$

［2］ $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy,\ D=\left\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq 1\right\}$

［3］ $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy,\ D=\left\{(x,y)\mid 0\leqq y\leqq 2,\ 0\leqq x\leqq\sqrt{4-y^2}\right\}$

［4］ $\displaystyle\iint_D y\,dxdy,\ D=\left\{(x,y)\mid y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq 9\right\}$

［5］ $\displaystyle\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\pi^2\right\}$

（2） 次の累次積分の積分順序を変更せよ。なお，被積分関数は連続とする。

［1］ $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dxdy$　［2］ $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dydx+\int_1^2\int_0^{2-x} f(x,y)\,dydx$

（3） $\displaystyle I=\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-x^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx$ に関する次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解

答用紙に書け。

(ここから) 積分順序の変更を行うと，$I=\int_1^2\int_0^{[\ 1\ ]}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy=\int_1^2\big[[\ 2\ ]\big]_0^{[\ 1\ ]}dy$

$=\int_1^2([\ 3\ ])\,dy=\big[[\ 4\ ]\big]_1^2=[\ 5\ ]$ (ここまで)

3．曲面 $z=x^2+2y^2$ と平面 $x+y=1$ および３つの座標平面で囲まれる立体の体積 V を求めよ。(5点)

4．$F(x,y)=x^4-2y^3-2x^2-3y^2+1$ と置くとき，$F(x,y)=0$ で定まる x の関数 $y=y(x)$ について，次の各問いに答えよ。なお，このとき，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{F_{xx}{F_y}^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}{F_x}^2}{{F_y}^3}$ が成り立つことは用いてよい。ただし，（2）は答のみ。(13点)

（1） $F(x,y)=0$ の特異点，即ち $F=F_x=F_y=0$ となる点 (x,y) を求めよ。

（2） 特異点以外の点で $y(x)$ が極値を取り得る x の値，およびその時の y の値を求めよ。

（3） $y(x)$ の極値とそれを取るときの x の値を求めよ。なお，特異点での極値判定は行わなくてよい。

5．$I=\iiint_K xy\,dxdydz$，$K=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqq R^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，R は正定数とする。ただし，答のみ。(12点)

注意：[　　] には数値が入る。

(ここから) 球面座標に変換する。即ち，$x=r\,(\ 1\ )\cos\phi$，$y=r\,(\ 2\ )$，$z=r\cos\theta$ とすれば

K は $\widetilde{K}=\left\{(r,\theta,\phi)\mid 0\leqq r\leqq R,\ 0\leqq\theta\leqq[\ 3\ ],\ 0\leqq\phi\leqq[\ 4\ ]\right\}$ となりJacobianは

$J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=(\ 5\ )$ となるから

$I=\iiint_{\widetilde{K}}(\ 6\ )\,drd\theta d\phi=\left(\int_0^R(\ 7\ )\,dr\right)\left(\int_0^{[\ 3\ ]}(\ 8\ )\,d\theta\right)\left(\int_0^{[\ 4\ ]}(\ 9\ )\,d\phi\right)$

ここで $\int_0^{[\ 3\ ]}(\ 8\ )\,d\theta=[\ 10\ ]$，$\int_0^{[\ 4\ ]}(\ 9\ )\,d\phi=[\ 11\ ]$ だから，$I=(\ 12\ )$ (ここまで)

6．$I=\iiint_K\tan^{-1}(x+y+z)\,dxdydz$，

$K=\left\{(x,y,z)\mid 1\leqq x+y+z\leqq\sqrt{3},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0\right\}$ について，次の各問いに答えよ。(12点)

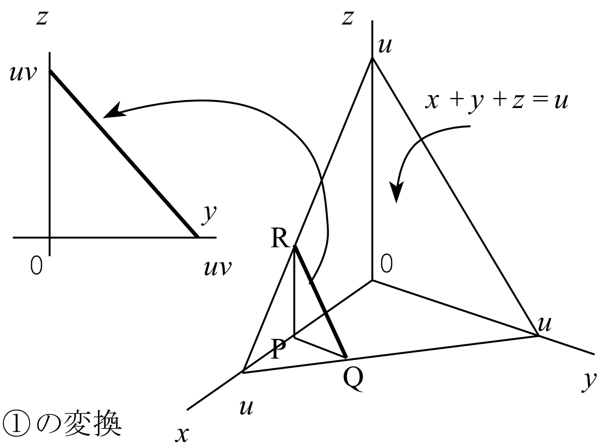
（1） 変数変換 $\begin{cases} x+y+z=u \\ y+z=uv \\ z=uvw \end{cases}$ … ① に関するJacobian $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ を求めよ。

（2） ①の変換によって K は $\widetilde{K}=\left\{(u,v,w)\mid 1\leqq u\leqq\sqrt{3},\ 0\leqq v\leqq 1,\ 0\leqq w\leqq 1\right\}$ となるこ

とを用いてよいので，変換①を用いて I を求めよ。指示に従わない解答には点を与えない。

注意：逆三角関数の値は求めよ。

7．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(13点)



（1） a を正定数とするとき三角錐

$K: x+y+z \leqq a,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$

の体積 V を重積分を用いて求める次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $V=\iiint_K dxdydz$ であるが問題６の①の変換を用いれば $V=\int_0^a\int_0^1\int_0^1 [\ 1\ ]\,dwdvdu=[\ 2\ ]$ (ここまで)

P $(u(1-v),0,0)$

Q $(u(1-v),uv,0)$

R $(u(1-v),0,uv)$

（2） $M=\left\{(x,y,z,s)\mid x+y+z+s \leqq a,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ s \geqq 0\right\}$ （a：正定数）

について，$I=\iiiint_M s^2\,dxdydzds$ を求める次の計算の［　］に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $0 \leqq s \leqq a$ なる s に対して M と超平面 $s=s$ との共通部分を xyz 空間に射影した立体を K_s とする。即ち，$K_s=\left\{(x,y,z)\mid x+y+z \leqq [\ 1\ ],\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\right\}$ となる。従って

$I=\int_0^a s^2\left(\iiint_{[\ 2\ ]} dxdydz\right)ds$ となる。（1）の結果から $\iiint_{[\ 2\ ]} dxdydz=[\ 3\ ]$ だから

$I=\int_0^a s^2\,[\ 3\ ]\,ds \overset{ア}{=} \frac{a^6}{6}\int_0^{[\ 4\ ]}[\ 5\ ]\,dt=[\ 6\ ]\int_0^{[\ 4\ ]}(1-t)^5\,dt=[\ 7\ ]$

（ア：$s=at$ と置く） (ここまで)