2017年度前期中間試験問題・微分積分Ⅲ（DC3）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=$ (1) $(x-1)$ となっていたら (1) の正解は $(x+3)$ であり，((1)) $(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

１．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

（1） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3}$ が収束するならその極限値を求め，発散するなら $\boxed{\text{発散}}$ と答えよ。

（2） 第 n 項が次の式で表される数列の極限値を求めよ。

［1］ $\displaystyle\frac{\log\left(n^2+1\right)}{\log n}$ ［2］ $n\left(e^{a/n}-e^{b/n}\right)$ $\left(a, b \text{ は定数で } a/n=\dfrac{a}{n}, b/n=\dfrac{b}{n}\right)$

（3） 級数の収束・発散に関する次の文章の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，< > には用語が入る。

(ここから) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{10n+2}{n+1}$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\frac{10n+2}{n+1}=$ [1] $\neq 0$ なので < 2 > する。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{n^2}$ は < 3 > 級数で各項において $\dfrac{e^{-n}}{n^2}\leqq$ [4] が成り立ち $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ [4] はゼータ級数の収束・発散の条件から < 5 > するので元の級数も < 5 > する。ある関数の Maclaurin 展開を用いれば

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}=$ [6] と和が求まる。(ここまで)

（4） べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{2n}$ の収束半径 R を求めよ。

（5） べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b(b-a)(b-2a)\cdots(b-na)}{n!}x^{2n}$ $(a, b：\text{定数で } a\neq 0)$ の収束半径を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。$\left(x^{2n}\text{ であることに注意せよ}\right)$

(ここから) $\displaystyle\alpha_n=\frac{b(b-a)(b-2a)\cdots(b-na)}{n!}x^{2n}$ と置くと

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|=\lim_{n\to\infty}$ [1] $\left|x^2\right|=$ [2] $\left|x^2\right|$ となる。([1] は簡単にしたものを答える)

D'Alembert の判定法からこのべき級数は $\left|x^2\right|<$ [3] で収束，$\left|x^2\right|>$ [3] で発散するから収束半径 $R=$ [4] となる。

（6） 次の x の関数の導関数を求めよ。

［1］ $e^{(4+5i)x}$ ［2］ $e^{3x}e^{-ix}$

（7） 次の値を求めよ。(三角関数の値を求めていない答えには点を与えない)

［1］ $e^{47\pi i}$ ［2］ $e^{\pi i/2}$ $\left(\pi i/2=\dfrac{\pi i}{2}\right)$

（8） $\log(1+2x)$ の $x=0$ における3次近似式を求め，ランダウの記号を用いて等式で表せ。

（9） $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ の $x=0$ における2次近似式を求め，ランダウの記号を用いて等式で表せ。

2．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(26点)

（1） 次の関数の全微分を求めよ。なお，定義域内で全微分可能であるとしてよい。

［1］ $z=(2x+y)e^{x+3y}$ ［2］ $z=(3x+5y)^4$

（2） 曲面 $z=\log\left(x^2+y^2\right)$ 上の $x=1,y=1$ に対応する点における接平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ の形で答えよ。

（3） $z=f(x,y)$ が全微分可能で，$x=te^t$，$y=\log t$ のとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を t，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ。

（4） $z=\sin(x+2y)$，$x=\dfrac{2}{t}$，$y=\log t$ について，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ。三角関数の角の部分は x,y の式のままでもよい。

（5） $z=x^2y$，$x=r+s$，$y=rs$ のとき ［1］ $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ ［2］ $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

なお，因数分解した r,s の式で答えよ。

（6） 次の関数を偏微分せよ。

［1］ $z=\dfrac{x+2y}{3x-2y}$ ［2］ $z=\cos 2x\log 3y$ ［3］ $z=e^{2x+y}\cos(x-y)$

［4］ $z=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$

（7） 次の関数の点（1，2）における偏微分係数の値を求めよ。

［1］ $f(x,y)=\log\left(x+y^2\right)$ ［2］ $f(x,y)=\exp\left(xy^2\right)$ $\left(\exp x=e^x\right)$

3．関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ を $x=5$ においてTaylor展開せよ。等号が成り立つときの x の範囲も求めよ。(5点)

4．双曲線関数 $f(x)=\cosh 2x$ に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，［ ］は数値，（ ）には数式が入る。ただし，答のみ。(11点)

(ここから) $f''(x)=[\ 1\ ]f(x)$ より $f''(0)=[\ 2\ ]$，また $f'(0)=0$ より $f^{(3)}(0)=0$ となる。

以上より $f^{(n)}(0)=\begin{cases}(\ 3\ ) & (n=2k)\\ 0 & (n=2k+1)\end{cases}$ $\left(k=0,1,2,\cdots\right)$，従って $\cosh 2x$ の Maclaurin展開は

$$\cosh 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(\ 4\ )\ \cdots\ ①\quad\left(\ \sum \text{ の下の文字は } n \text{ である}\right)$$

となる。（ 4 ）を α_n と表せば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|=\lim_{n\to\infty}(\ 5\ )\left|x^2\right|=0$ （任意の $x\in\mathbf{R}$）

（（ 5 ）は簡単にした式）となるから，この級数の収束半径は ∞ である。①を 0 から x まで項別積分すれば $\displaystyle\int_0^x \cosh 2t\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x$（ 6 ）$dt=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$（ 7 ）となるから，これより $\sinh 2x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$（ 8 ）となる。(ここまで)

5．x を実数とする。e^{i3x} に Euler の公式を適用したものと，実際に e^{ix} を 3 乗したものを比較して次の等式を示せ。(9点)

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,\ \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$

6．次の各問いに答えよ。ただし，答のみ。(8点)

(1) $z=x^3\log y$ の第 3 次偏導関数を求めよ。

[1] z_{xxx} [2] z_{xxy} [3] z_{xyy} [4] z_{yyy}

(2) $f(x,y)=3x^3y^2-4x^2y^3$ の点 (1，-1) における第 2 次偏微分係数の値を求めよ。

[1] $f_{xx}(1,-1)$ [2] $f_{xy}(1,-1)$ [3] $f_{yx}(1,-1)$ [4] $f_{yy}(1,-1)$

7．次の各問いに答えよ。なお，級数は $\sum$ を用いて答えよ。(12点)

(1) $\dfrac{1}{1+x^2}$ の Maclaurin 級数（ $|x|<1$ ）を求めよ。ただし，答のみ。

(2) (1) で求めた級数を項別積分することにより $\tan^{-1}x$ の Maclaurin 級数（ $|x|<1$ ）を求めよ。

(3) $f(x)=x^2\log(1+x)$ の $x=0$ における 3 次近似式を求め，ランダウの記号を用いて等式で表せ。ただし，答のみ。

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan^{-1}x}{x^2\log(1+x)}$ の値を (2)，(3) の結果を利用して求めよ。

8．数列 0，1，1，2，3，5，8，13，… は $a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$ という漸化式によって生成される。n が十分大きな値になると $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ はどのような値に収束するかを調べる次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[　] は数値，(　) には文字，数式が入る。ただし，答のみ。(5点)

(ここから) $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ (n\geqq 1)$ と置けば明らかに $n\geqq 1$ ならば $a_n>0$ だから漸化式より

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$，即ち $b_n=1+\dfrac{1}{b_{n-1}}\ (n\geqq 2)$，$b_1=1$ となる。方程式 $x=1+\dfrac{1}{x}$ の正の解を α とすれば $\alpha=$[1] である。$|b_n-\alpha|=\left|1+\dfrac{1}{b_{n-1}}-\alpha\right|=\dfrac{|b_{n-1}-\alpha|}{b_{n-1}(\ 2\ )}$

明らかに $b_{n-1}\geqq 1$ であり $\dfrac{1}{(\ 2\ )}=$[3] であるから

$$|b_n-\alpha|=\frac{|b_{n-1}-\alpha|}{b_{n-1}(\ 2\ )}\leqq[\ 3\ ]|b_{n-1}-\alpha| \quad \therefore\ |b_n-\alpha|\leqq([\ 3\ ])^{(\ 4\ )}|b_1-\alpha| \quad (n\geqq 1)$$

$|[\ 3\ ]|<1$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}b_n=[\ 5\ ]$ (ここまで) (筑波大 改)