2019年度学年末試験問題・微分積分Ⅳ（D3）

注意：(1) 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら $(\ 1\ )$ の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

(2) 任意定数に C，C_1，C_2 などを使う場合はそのことを断らなくてもよい。

(3) 特に断らない限り $y=y(x)$ である。また，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ y'，y'' と表すことがある。

1．$\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+5y=e^{2x}$ … ① に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(6点)

(ここから) ①の左辺を $L(y)$ と表わす。$L(y)=0$ の一般解は $y=(\ 1\ )$ である。①の１つの解を $h=Ae^{2x}$ （A：定数）とすれば $L(h)=(\ 2\ )e^{2x}$ だから $L(h)=e^{2x}$ となるように定数 A を求めれば $A=(\ 3\ )$ となる。以上より①の一般解は $y=(\ 4\ )$ となる。(ここまで)

2．$\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=\sin x$ … ② に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(7点)

(ここから) ②の左辺を $L(y)$ と表わす。$L(y)=0$ の一般解は $y=(\ 1\ )$ である。$L(y)=e^{ix}$ $(i^2=-1)$ の１つの解 h を問題１と同様な方法で求めると $h=(\ 2\ )e^{ix}$ となる。h の虚部は $\mathrm{Im}(h)=(\ 3\ )$ となる。以上より②の一般解は $y=(\ 4\ )$ となる。(ここまで)

3．$\dfrac{d^2y}{dx^2}=1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$ 満たす特殊解を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，$-\dfrac{3}{4}p<x<\dfrac{p}{4}$ とする。ただし，答のみ。(12点)

(ここから) $p=y'$ と置くと原方程式は $\dfrac{p'}{1+p^2}=1$ となるから $\displaystyle\int\frac{dp}{1+p^2}=x+C_1$

$\therefore$ $(\ 1\ )=x+C_1$，$y'(0)=1$ から $C_1=\dfrac{p}{(\ 2\ )}$ $\therefore$ $p=(\ 3\ )$ これを積分して $y=(\ 4\ )+C_2$

$x=0$ のとき $(\ 4\ )$ の値は $\dfrac{1}{2}(\ 5\ )$ となるから，これと $y(0)=0$ から $C_2=(\ 6\ )$ となる。

以上より $y=-\log((\ 7\ )-\sin x)$ (ここまで)

4．次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) $L(y)=y''+y$ のとき，次の微分方程式の一般解を求めよ。

[1] $L(y)=0$　　[2] $L(y)=3\sin x$

(2) $L(y)=y''+y'-6y$ のとき，次の微分方程式の一般解を求めよ。

[1] $L(y)=0$　[2] $L(y)=e^{-3x}$

(3) $L(y)=y''-2y'-3y$ のとき, 次の微分方程式の一般解を求めよ。

[1] $L(y)=0$　[2] $L(y)=3x-1$

(4) 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお, x, y は t の関数である。

(ここから) 連立線形微分方程式 $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ の一般解を求める。A の固有値は $l_1<l_2$ とすれば $l_1=[\ 1\ ]$, $l_2=[\ 2\ ]$, l_1 に対する1つの固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ [\ 3\ ] \end{pmatrix}$, l_2 に対する1つの固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ [\ 4\ ] \end{pmatrix}$ となり, A の対角化行列を $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ [\ 3\ ] & [\ 4\ ] \end{pmatrix}$ とする。$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ … ① と変換すれば, 原方程式は X, Y の連立線形微分方程式 $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} [\ 5\ ] & 0 \\ 0 & [\ 6\ ] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} [\ 7\ ] \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。これから X, Y の一般解を求めると $X=[\ 8\ ]+C_1e^{[\ 9\ ]}$, $Y=C_2e^{[\ 10\ ]}$ となり, これと①から $x=[\ 11\ ]$, $y=[\ 12\ ]$ となる。(ここまで)

5. $(y+1)\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3=0$ $(y+1>0)$ の一般解を求めよ。(8点)

Hint: $p=\dfrac{dy}{dx}$ と置けば $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$

6. $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+6y=0$ $(|x|<1)$ … ① の解法に関する次の記述の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお, (　) は n または x の式, [　] は m の式または数値が入る。ただし, 答のみ。(10点)

(ここから) この解級数を用いて $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(a_n：定数)$ とする。項別微分可能として

$y'=\sum_{n=1}^{\infty}(\ 1\ )a_nx^{n-1}$, $y''=\sum_{n=2}^{\infty}(\ 2\ )a_nx^{n-2}$ となり, これらを①に代入して整理すると

$\sum_{n=2}^{\infty}(\ 2\ )a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}((\ 3\ ))a_nx^n$ … ② となる。②の左辺において $n=m+2$ とすれば

すれば $\sum_{n=2}^{\infty}(\ 2\ )a_nx^{n-2}=\sum_{m=0}^{\infty}[\ 4\ ]a_{m+2}x^m$ となる。これは $\sum_{n=0}^{\infty}(\ 5\ )a_{n+2}x^n$ と同じだから

結局②は $\sum_{n=0}^{\infty}(\ 5\ )a_{n+2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}((\ 3\ ))a_nx^n$ … ③ となる。③両辺の x^n の係数を比較して漸化式 $a_{n+2}=(\ 6\ )a_n$ $(n\geqq 0)$ … ④ を得る。$a_2=[\ 7\ ]a_0$ で n が4以上の偶数なら $a_n=0$ となるから, $y'(0)=0$ を満たす①の解は $y=((\ 8\ ))a_0$ となる。(ここまで)

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+w^2y=\sin Wx$ の１つの解を求めよ。なお，w , W は正定数とする。(7点)

8. $L(y)=(x+1)\dfrac{d^2y}{dx^2}-(2x+3)\dfrac{dy}{dx}+2y$ と置くとき，次の問いに答えよ。なお，$x+1>0$ とする。ただし，答のみ。(11点)

(1) $L(y)=0$ の１つの解を $y_1=e^{ax}$ （ a ：定数）と予想して求めよ。

(2) y_1 を用いてこれと線形独立な $L(y)=0$ のもうひとつの解 y_2 を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，各不定積分において積分定数は省略せよ。

(ここから) Lagrange 定数変化法を用いると $y_2=y_1\displaystyle\int\frac{1}{{y_1}^2}\exp\left(\int[\ 1\ ]dx\right)dx$, ここで

$\displaystyle\int[\ 1\ ]dx=[\ 2\ ]$ だから $\exp([\ 2\ ])=[\ 3\ ]$ $\therefore y_2=y_1\displaystyle\int\frac{[\ 3\ ]}{{y_1}^2}dx=[\ 4\ ]$ (ここまで)

(3) (1),(2) の結果を用いて $L(y)=0$ の一般解を最も適切な形で答えよ。

9. $y_1=\sin x$, $y_2=\sin(x+a)$ $(0\leqq a<2p)$ の線形独立性を Wronskian を用いて調べよ。(4点)

10. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=x^2(3x^2+2)$ $(x>0)$ … ① の解法に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(10点)

(ここから) $t=\log x$ と変換すれば $\dfrac{dy}{dx}=(\ 1\ )\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{x^2}((\ 2\ ))$, これらを①に代入すると①の左辺 $=(\ 3\ )$, ①の右辺 $=(\ 4\ )$ となるので①は $(\ 3\ )=(\ 4\ )$ … ② なる定数係数線形微分方程式になる。$D=\dfrac{d}{dt}$ とし $f(D)=(\ 5\ )$ とすれば②は $f(D)y=(\ 4\ )$ と表わせる。まず $f(D)y=0$ の一般解を y_0 とすれば $y_0=(\ 6\ )$, 次に $f(D)y=(\ 4\ )$ の１つの解 h は $h=\dfrac{1}{f(D)}(\ 4\ )=(\ 7\ )$ となる。t を元に戻せば①の一般解は $y=(\ 8\ )$ となる。(ここまで)

クラス D3 番号 氏名

1(1) 2点		4(1)[1] 1点	
1(2) 1点	1(3) 1点	4(1)[2] 2点	
1(4) 2点		4(2)[1] 1点	
2(1) 1点		4(2)[2] 2点	
2(2) 2点		4(3)[1] 1点	
2(3) 2点		4(3)[2] 2点	
2(4) 2点		4(4)[1] 1点	4(4)[2] 1点
3(1) 1点		4(4)[3] 1点	4(4)[4] 1点
3(2) 1点		4(4)[5] 1点	4(4)[6] 1点
3(3) 2点		4(4)[7] 2点	
3(4) 2点		4(4)[8] 2点	
3(5) 2点		4(4)[9] 1点	4(4)[10] 1点
3(6) 2点		4(4)[11] 2点	
3(7) 2点		4(4)[12] 2点	

[redacted]

5 (8点)

6(1) 1点

6(2) 1点

6(3) 2点

6[4] 1点

6(5) 1点

6(6) 2点

6[7] 1点

6(8) 1点

7 (7点)

8(1) 2点

8(2)[1] 1点

8(2)[2] 2点

8(2)[3] 2点

8(2)[4] 2点

8(3) 2点

9 (4点)

10(1) 1点

10(2) 1点

10(3) 1点

10(4) 1点

10(5) 1点

10(6) 1点

10(7) 2点

10(8) 2点