2019年度後期中間試験問題・微分積分Ⅳ（D3）

注意：(1) 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら $(\ 1\ )$ の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは０点とする。

(2) $\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。任意定数として C などを用いるときは特に断らなくてよい。

１．次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(10点)

(ここから) $I=\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\ D: x^2+y^2 \leqq 5,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$ を求める。$0<e<1$ に対して $D_e: e^2 \leqq x^2+y^2 \leqq 5,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ I_e=\displaystyle\iint_{D_e} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ とする。極座標に変換すると

$$I_e=\int_0^{(\ 1\ )}\int_{(\ 2\ )}^{(\ 3\ )}(\ 4\ )\,drdq=\left(\int_0^{(\ 1\ )}(\ 5\ )\,dq\right)\left(\int_{(\ 2\ )}^{(\ 3\ )}(\ 6\ )\,dr\right)$$

$$=[(\ 7\ )]_0^{(\ 1\ )}\cdot[(\ 8\ )]_{(\ 2\ )}^{(\ 3\ )}=\frac{1}{2}((\ 9\ ))\ \therefore I=\lim_{e\to+0}I_e=(\ 10\ )$$

２．次の２重積分の値を求めよ。ただし，答のみ。(6点)

(1) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy,\ D: x^2+y^2\leqq 3,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ D: 6\leqq x^2+y^2\leqq 8$

(3) $\displaystyle\iint_D \left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4}\right)dxdy,\ D: (x-2)^2+y^2\leqq 4$

(4) $\displaystyle\iint_D \left(9-x^2-y^2\right)dxdy,\ D: x^2+y^2\leqq 9$

３．次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(9点)

(ここから) $I=\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy,\ D: 0\leqq y+4x\leqq 4,\ 0\leqq y-4x\leqq 4$ を求める。$u=y+4x$, $v=y-4x$ と変換する。x, y を u, v で表せば $x=(\ 1\ ),\ y=(\ 2\ )\ \therefore \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=(\ 3\ )$

$$x+y=(\ 4\ )\ \therefore I=\frac{1}{64}\int_0^4\int_0^4((\ 5\ ))\,dvdu=\frac{1}{64}\int_0^4[(\ 6\ )]_0^4\,du=\frac{1}{16}\int_0^4((\ 7\ ))\,du$$

$$=\frac{1}{16}[(\ 8\ )]_0^4=(\ 9\ )$$

４．次の各問に答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) ある物質の質量が減少する割合 (変化率) はそのときの質量に比例するという。比例定数を

$k\ (k>0)$ として，時刻 t における質量 $y=y(t)$ についての微分方程式を作れ。

(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=-y+e^{-x}$ … ① について，次の問いに答えよ。

[1] $\dfrac{dy}{dx}=-y$ の一般解を求めよ。　[2] ①の一般解を求めよ。

[3] $y(1)=5$ を満たす①の特殊解を求めよ。

(3) c が 0 でない定数のとき，次の曲線が解曲線となるような微分方程式を作れ。

[1] $y=\log(x+C)$　[2] $y=\dfrac{C}{x+1}$

(4) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2xy}{x^2+1}=x^3+x$ … ② に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2xy}{x^2+1}=0$ の一般解を求めると $y=C[\ 1\ ]$ となる。C を $u=u(x)$ に置き換えて $y=u[\ 1\ ]$ を②に代入して計算すれば $\dfrac{du}{dx}=[\ 2\ ]$ となりこれを解いて $u=[\ 3\ ]+C$

以上より②の一般解は $y=[\ 4\ ]$ となる。また $y(0)=0$ を満たす②の特殊解を求めると

$y=[\ 5\ ]$ となる。(ここまで)

(5) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-2x^2}{xy}\ \ (x>0)$ … ③ について，次の問いに答えよ。

[1] $u=\dfrac{y}{x}$ として③から u の微分方程式を導け。　[2] ③の一般解を求めよ。

[3] $y(1)=3$ を満たす③の特殊解を求めよ。

5. $I=\iiint_K z^4\,dxdydz$, $K: x^2+y^2+z^2\leqq R^2\ (R>0)$ を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(5点)

(ここから) $|z|\leqq R$ を満たす z に対して xy 平面上の領域 $D_z: x^2+y^2\leqq R^2-z^2$ を考えれば

$$\iint_{D_z} dxdy=(\ 1\ )\ \text{だから}\ I=\int_{-R}^{R}\left(\iint_{D_z}(\ 2\ )\right)dz=\int_{-R}^{R}(\ 3\ )dz=2p[(\ 4\ )]_0^R=(\ 5\ )$$

6. $I=\iint_D x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}dxdy$, $D: x+y\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$ とするとき，次の等式を証明せよ。ただし，p,q,r は正の定数とする。(12点)

(1) $I=B(p+q,r)B(p,q)$　(2) $B(p+q,r)B(p,q)=B(p,q+r)B(q,r)$

7. 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(8点)

(ここから) $I=\int_0^{\infty}(x+1)^2\exp\left(-x^2\right)dx$ を求める。$\int_0^{\infty}\exp\left(-x^2\right)dx=(\ 1\ )$

$$\int_0^{\infty} x\cdot\exp\left(-x^2\right)dx=[(\ 2\ )]_0^{\infty}=(\ 3\ )$$

$$\int_0^{\infty} x^2\cdot\exp\left(-x^2\right)dx=[(\ 4\ )]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}(\ 5\ )dx=(\ 6\ )$$ (部分積分法)，従って $I=(\ 7\ )$

8. ある物質の濃度 $y=y(t)$ は時刻 t とともに変化し，微分方程式

$\dfrac{dy}{dt}=-100\exp(-3t)+4(20-y)$ … ①， $y(0)=10$ … ② を満たしている。このとき，次の問いに答えよ。ただし，(3),(4) は答のみ。(13点)

(1) $\dfrac{dy}{dt}=4(20-y)$ の一般解を求めよ。　(2) ①の一般解を求めよ。

(3) ②の条件を満たす①の特殊解を求めよ。　(4) $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ を求めよ。

9. $\dfrac{dy}{dx}+xy=y^3\exp\left(x^2\right)$ … ① の解法に関する次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(12点)

(ここから) $z=\dfrac{1}{y^2}$ とすれば $\dfrac{dz}{dx}=(\ 1\ )\dfrac{dy}{dx}$ だから①より z の１階線形微分方程式

$\dfrac{dz}{dx}-(\ 2\ )z=(\ 3\ )\exp\left(x^2\right)$ … ② が導かれる。$\dfrac{dz}{dx}-(\ 2\ )z=0$ の一般解を求めると $z=C(\ 4\ )$ となる。C を $u=u(x)$ に置き換えて $z=u(\ 4\ )$ を②に代入し u の微分方程式を解けば $u=(\ 5\ )+C$ となる。従って $z=(\ 6\ )$ となるから $y^2=(\ 7\ )$ なお，$y=0$ も解である。