2019年度前期末試験問題・微分積分Ⅲ（D3） [redacted]

注意：

(1) 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら $(\ 1\ )$ の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

(2) $\exp(x)=e^x$ である。　(3) $\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。

1．体積が一定な直円柱のうちで，表面積が最小なものの底面の半径と高さの比を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，最小値をもつとしてよい。ただし，答のみ。(8点)

(ここから) 半径を x，高さを y，一定の体積を V とすれば，条件 $(\ 1\ )=V$ のもとで表面積 $f=(\ 2\ )$ を考える。$f=(\ 1\ )-V$ とすれば $f_x=(\ 3\ ),\ f_y=(\ 4\ ),\ f_x=(\ 5\ ),\ f_y=(\ 6\ )$ だからLagrangeの未定乗数法から $(\ 5\ )=l\,(\ 3\ )$ … ①，$(\ 6\ )=l\,(\ 4\ )$ … ②

②から $l=(\ 7\ )$ これを①に代入して整理すると $\dfrac{y}{x}=(\ 8\ )$ と比が求まる。(ここまで)

2．a をパラメータとする曲線群 $y=a\,x^2+\dfrac{1}{a}$ の包絡線の方程式を求める次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(5点)

(ここから) 包絡線は連立方程式 $\begin{cases} y=a\,x^2+\dfrac{1}{a} & \cdots ① \\ (\ 1\ ) & \cdots ② \end{cases}$ を満たす。①の両辺を2乗して②を用いて a を消去した式を導くと $y^2=(\ 2\ )x^2$ 従って包絡線の方程式は $y=(\ 3\ )$ (ここまで)

3．次の関数の第2次偏導関数を求めよ。ただし，答のみ。(8点)

(1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$　[1] z_{xx}　[2] z_{xy}　[3] z_{yy}

(2) $z=\exp\left(y^2-x^2\right)$　[1] z_{xx}　[2] z_{xy}　[3] z_{yy}

4．関数 $f(x,y)=x^3-4xy-y^2+4x$ の停留点の座標を求めよ。ただし，答のみ。(4点)

5．次の2重積分の値を求めよ。なお，分数は既約分数を答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\ D:0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq\sqrt{x}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy^2dxdy,\ D:0\leqq y\leqq 2,\ 0\leqq x\leqq\sqrt{4-y^2}$

(3) $\displaystyle\iint_D \cos(x-y)dxdy,\ D:\left[0,\ \frac{p}{2}\right]^2$

(4) $\displaystyle\iint_D \exp(2x+y)dxdy,\ D:[0,1]\times[1,2]$

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy$, D：$1 \leqq x \leqq 3,\ x \leqq y \leqq 2x$

(6) $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dxdy$, D：$y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1$

(7) $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, D：$[0,2]\times[-2,0]$

(8) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2+4}\,dxdy$, D：$\left[0,2\sqrt{3}\right]\times[0,2]$

(9) $\displaystyle\iint_D \left(xy^2+y\right)dxdy$, D：$[0,1]\times[1,3]$

6. 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。(5点)

(ここから) 1変数関数 f は2回微分可能とする。$z=f(x+at)+f(x-at)$ （a：定数）

f' を用いて表せば $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(\ 1\ )$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}=(\ 2\ )$ だから f'' を用いれば $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(\ 3\ )$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=(\ 4\ )$，従って $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=(\ 5\ )\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ となる。(ここかで)

7. 関数 $f(x,y)=4x^2-2xy^2+y^5$ について，次の問いに答えよ。(17点)

(1) この関数の停留点の座標を求めよ。　(2) この関数の極値を求めよ。

8. $I=\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} dydx+\int_{0}^{1}\int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} dydx$ の値を求めよ。ただし，答のみ。(3点)

9. $I=\displaystyle\int_{0}^{p/2}\int_{\sin x}^{1} f(x,y)\,dydx$ について，次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(4点)

(1) 積分領域を図示せよ。　(2) 積分順序を変更せよ。なお，$f(x,y)$ は連続とする。

10. a を正定数とし，cycloid $\begin{cases} x=a\left(t-\sin t\right) \\ y=a\left(1-\cos t\right) \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq p\right)$ と x 軸および直線 $x=pa$ で囲まれた領域を D とするとき，2重積分 $I=\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ について次の問いに答えよ。(10点)

(1) 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。ただし，答のみ。

(ここから) I を累次積分に直すと $I=\displaystyle\int_0^{pa}\int_0^{y} y\,dydx=\int_0^{pa}[[\ 1\ ]]_0^{y}dx=\int_0^{pa}[\ 1\ ]dx$ … ①

$x=a\left(t-\sin t\right)$ のとき $\dfrac{dx}{dt}=[\ 2\ ]>0$ $\left(0<t<p\right)$ だから①の積分で $x=a\left(t-\sin t\right)$ と置換すれば $\displaystyle\int_0^{pa}[\ 1\ ]dx=\int_0^{[\ 3\ ]}[\ 4\ ]dt$ となる。(ここまで)

(2) 上の (1) で導かれた $\int_0^{[\ 3\ ]} [\ 4\ ]dt$ を計算して値を求めよ。

11. 累次積分 $I=\int_0^1 \int_x^1 \exp\left(-y^2\right) dydx$ の値を求めよ。(5点)

12. $x^4-2y^3-2x^2-3y^2+1=0$ $(y \neq 0, -1)$ により定義される x の関数 y の極値を求めよ。
(6点)

クラス D3 番号 氏名

1(1) 1点	
1(2) 1点	
1(3) 1点	1(4) 1点
1(5) 1点	1(6) 1点
1(7) 1点	1(8) 1点
2(1) 1点	
2(2) 2点	
2(3) 2点	
3(1)[1] 2点	
3(1)[2] 1点	3(1)[3] 1点
3(2)[1] 2点	
3(2)[2] 1点	3(2)[3] 1点
4 (4点)	

5(1) 2点
5(2) 3点
5(3) 3点
5(4) 3点
5(5) 2点
5(6) 3点
5(7) 3点
5(8) 3点
5(9) 3点

6(1) 1点

6(2) 1点

6(3) 1点

6(4) 1点

6(5) 1点

7(1) 5点

7(2) 12点

8 (3点)

9(1) 2点

9(2) 2点

10(1)[1] 1点

10(1)[2] 1点

10(1)[3] 1点

10(1)[4] 2点

10(2) 5点

11 (5点)

12 (6点)