2019年度前期中間試験問題・微分積分Ⅲ（D3）

注意： 答のみの問題で，問題番号を囲む括弧は数式上必要な括弧を兼ねていない。例えば $x^2+2x-3=(\ 1\ )(x-1)$ となっていたら $(\ 1\ )$ の正解は $(x+3)$ であり，$((\ 1\ ))(x-1)$ となっていたら正解は $x+3$ である。また，不必要な括弧をつけた解答も減点もしくは 0 点とする。

注意： 級数は必ず $\sum$ を用いて答えること。用いていない答のみの問題は点を与えない。

注意： $\dfrac{b}{a}$ を b/a と表すことがある。また $\exp x=e^x$ である。

注意： $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合である。

1．次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) 次の関数の導関数を求めよ。

[1] $\exp\{(3-2i)x\}$ [2] $\dfrac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}$

(2) 次の極限値を求めよ。なお，$\boxed{\text{発散するときは}\ \infty,\ -\infty,\ \text{振動}}$ のいずれかを答えよ。

[1] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$ [2] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n}-2n\right)$ [3] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)^n$

[4] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ [5] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}}$ [6] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^{100}90^n}{n!}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ について，次の問いに答えよ。

[1] $\displaystyle S_p=\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ を求めよ。

[2] この級数の和を求めよ。発散するときは $\boxed{\text{発散}}$ と答えよ。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n}$ が発散する理由を答えよ。

(5) 次の計算の [　] に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。

(ここから) $\displaystyle S_p=\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{n}},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ (x>0)$ とすれば $f'(x)=[\ 1\ ]<0$ だから

$\displaystyle S_p>\int_1^{[\ 2\ ]}f(x)dx=[[\ 3\ ]]_1^{[\ 2\ ]}=[\ 4\ ]\to\infty\ (p\to\infty)\ \ \therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\infty$ (ここまで)

2．次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) $f(x)=\cos 2x$ の Maclaurin 級数を求めよ。

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の $x=-1$ における Taylor 級数を求めよ。ただし，$|x+1|<1$ とする。

(3) 次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，{　} は数値が入る。

(ここから) $f(x)=x^2e^{-x}$ のとき，$f'(x)=[\ 1\ ],\ f''(x)=[\ 2\ ]$ となる。$[\ 1\ ]=0$ の解は

x={ 3 },{ 4 } ({ 3 }<{ 4 }) となり，f''({ 3 })={ 5 }，f''({ 4 })={ 6 } だから f({ 3 })={ 7 } は [8] 値，f({ 4 })={ 9 } は [10] 値となる。(ここまで)

(4) e^x の $x=0$ における 3 次近似式を用いて e の近似値を求めよ。

(5) $n \in \mathbb{N}$ のとき，次の値を n の簡単な式で答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

[1] $\exp(np\,i)$　　[2] $\exp\left(\dfrac{np}{2}i\right)$

(6) 次の数列の極限値を求めよ。

[1] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2}{np}$　　[2] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(4n-5)}{1-3n^2}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$ の値を求めよ。

(8) べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^{n/3}$ の収束半径を求めよ。

3. 次の問いに答えよ。ただし，答のみ。(25点)

(1) $z=f(x,y)$ が全微分可能で，x, y が次のような t の関数のとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を t，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ。　[1] $x=\log t$, $y=te^t$　　[2] $x=\sin t+\cos t$, $y=\sin t\cos t$

(2) 次の関数について，$\dfrac{dz}{dt}$ を求め，t のみの式で答えよ。なお，分数式または分数型の式は通分したものを答えよ。

[1] $z=\log(x+y)$, $x=\sqrt{t-1}$, $y=\sqrt{t+1}$

[2] $z=\sin(x+2y)$, $x=\log t$, $y=\dfrac{2}{t}$

(3) $z=f(x,y)$ が全微分可能で，$x=\dfrac{t}{s}$, $y=t^2+s^2$ のとき，次の偏導関数を s, t, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ。　[1] $\dfrac{\partial z}{\partial s}$　　[2] $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

(4) $z=x^2\log y$, $x=2s+t$, $y=st$ のとき，次の偏導関数を s, t のみ式で答えよ。

[1] $\dfrac{\partial z}{\partial s}$　　[2] $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

(5) 曲面 $z=\log\sqrt{x^2+y^2}$ は zx 平面上の曲線 z=[1] を [2] 軸のまわりに回転させてできるが，z=[1] は偶関数なので曲線 z=[3] ($x>0$) を [2] 軸のまわりに回転させればよい。また $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\log\sqrt{x^2+y^2}$=[4]　(括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け)

(6) 次の関数の偏導関数を求めよ。

[1] $z=\sqrt{2x^2y+3xy^2}$　　[2] $z=\dfrac{x}{x+y}$　　[3] $z=e^{3x}\tan 2y$

[4] $z=4x^2-3xy+6y^2$

4．次の計算の括弧に入る最も適切な答えを解答用紙に書け。なお，[　　]は数値が入る。ただし，答のみ。(12点)

(ここから) $f(x)=\exp(\cos x)$ のとき，$f(0)=[\ 1\ ]$, $f'(x)=(\ 2\ )$, $f''(x)=(\ 3\ )$, $f^{(3)}(x)=(\ 4\ )$, $f^{(4)}(x)=(\ 5\ )$ だから，$f'(0)=0$, $f''(0)=[\ 6\ ]$, $f^{(3)}(0)=0$, $f^{(4)}(0)=[\ 7\ ]$ より，$f(x)$ の $x=0$ における4次近似式は $f(x)=(\ 8\ )+o\left(x^4\right)$ となる。
(ここまで)

5．$z=\tan^{-1}\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ $(y\neq\pm x)$ について，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ。(7点)

6．関数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ について，$(x,y)\neq(0,0)$ のとき

$e=f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y$ を求めよ。また直線 $y=2x$ $\left(x<0\right)$ に沿って点 (x,y) を原点に近づけるとき，$\dfrac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の極限値を求めよ。(富山大・改) (6点)